MATEMÁTICAS **Secundaria**

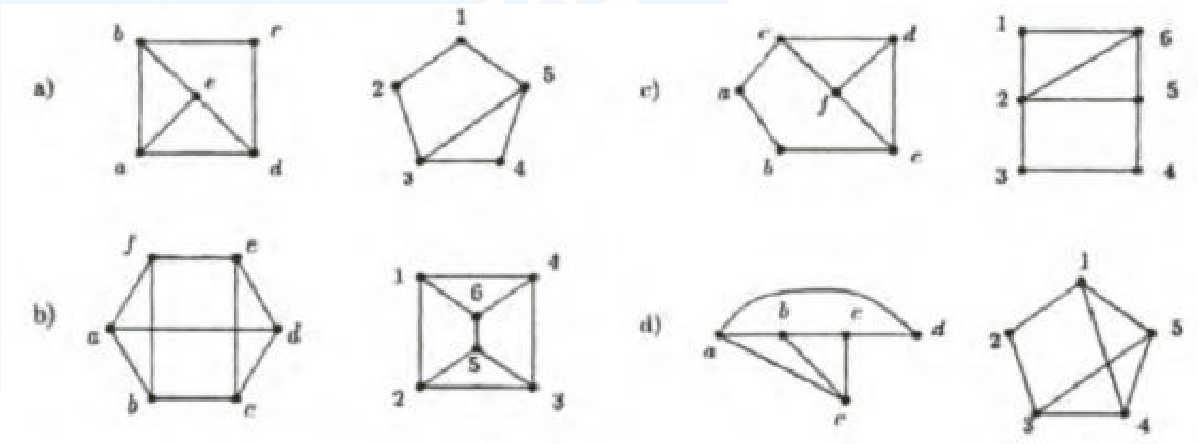
CURSO 2019/20

SEMANA: 27

TEMAS: 2, 10 y 17

MATERIAL ELABORADO POR: David

1.- Para cada uno de los siguientes pares de grafos decidir, razonadamente, si son o no isomorfos.



Solución:

a) No son isomorfos ya que no tienen el mismo número de aristas.

b) Son isomorfos. Una aplicación biyectiva podría ser g(a)=5, g(b)=3, g(c)=4, g(d)=6, g(e)=1 y g(f)=2.

c) No son isomorfos. El vértice 2 tiene grado 4 y no hay ningún vértice en el primer grafo con dicho grado.

d) Son isomorfos. Una aplicación biyectiva podría ser g(a)=1, g(b)=5, g(c)=3, g(d)=2 y g(e)=4.

2.- Determinar el número de recorridos de longitud 2 y de longitud 3 entre los vértices de K_4.

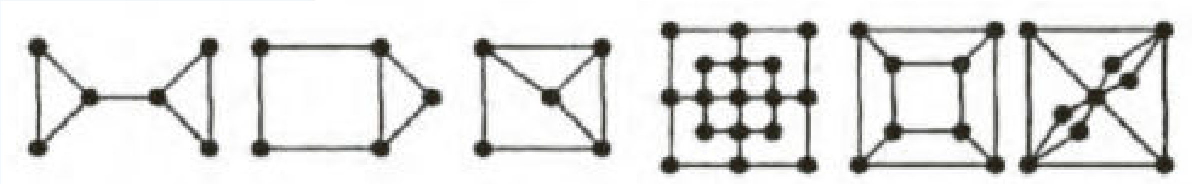
Solución:

El grafo K_4 tiene como matriz de adyacencia $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Los recorridos de longitud 2 son $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Los recorridos de longitud 3 son $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

3.- En cada uno de los siguientes grafos, estudia si existe un ciclo euleriano y/o un ciclo hamiltoniano.



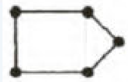
Solución:

a) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

No es hamiltoniano. Tiene puntos de corte.

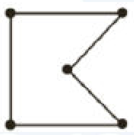
b) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

Si es hamiltoniano. Un ejemplo de ciclo hamiltoniano es



c) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

Si es hamiltoniano. Un ejemplo de ciclo hamiltoniano es



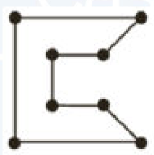
d) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

No es hamiltoniano. Quitando los 4 puntos intermedios del cuadrado interior quedan 5 componentes conexas.

(Teorema (condición necesaria):Sea G un grafo conexo. Si existe $W \subset V$ tal que $G \setminus W$ tiene c componentes conexas con $c > |W|$ entonces G no es hamiltoniano.)

e) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

Si es hamiltoniano. Un ejemplo de ciclo hamiltoniano es



f) No es euleriano. Tiene vértices de grado impar.

No es hamiltoniano. Quitando el vértice central y la esquina inferior izquierda quedan 3 componentes conexas.

(Nota: Teorema (Ore,1960)
Sea n el numero de vértices de un grafo G=(V,E) . Si ***para todo par*** *$u,v \in V$ de vértices no adyacentes se tiene que $gr(u)+gr(v) \geq n$ entonces G es hamiltoniano.*

4.- Una empresa quiere construir un dominó para niños y, a fin de que sea más sencillo, ha decidido eliminar las fichas dobles y que cada una de ellas pueda llegar solamente hasta el 3 (es decir, una ficha tendrá dos valores distintos y cada uno de ellos puede valer 0, 1, 2 ó 3). Sin embargo, se preguntan si con ese dominó se podrá jugar, esto es, si se pueden poner todas las fichas unas a continuación de otra.

a) Resolver el problema considerando las fichas como aristas de un grafo que deberás construir.

Solución: El problema equivale a ver si el grafo K_4 es euleriano pero no lo es por tener vértices de grado impar. No se puede.

b) ¿Qué ocurre si el dominó tiene fichas que llegan hasta el 4?

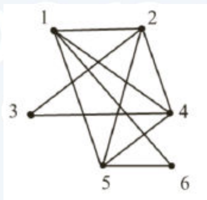
Solución: El problema equivale a ver si el grafo K_5 es euleriano lo cual es cierto ya que todos sus vértices tienen grado par. Si se puede.

c) Supongamos que las fichas pueden llegar hasta un cierto valor *n*. ¿Para qué valores de *n* se podrá jugar y para cuáles no?

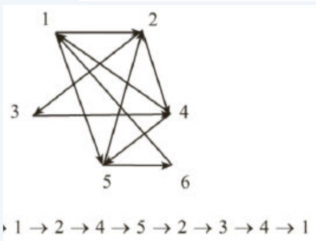
Solución: Si n es impar no se puede jugar. Si n es par, si se puede. El problema equivale a ver si el grafo K_{n+1} es euleriano.

5.- Se dan 10 fichas de dominó con puntuaciones (1, 2), (1, 6), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (6, 5) y (4, 5). ¿Es posible poner estas fichas formando un círculo de forma que dos fichas se toquen solamente por los mismos números?

Solución: El grafo correspondiente es



cuyos vértices tienen grado par, luego es euleriano y si se puede jugar. Un ejemplo de camino euleriano es



6.- Probar que todo grafo G = (V, E) sin bucles, con un número de vértices mayor o igual que 2 tiene al menos dos vértices con el mismo grado. ¿Es posible que en una fiesta con más de dos invitados cada uno de ellos conozca a un número diferente de invitados?

Solución: Supongamos que no hay dos vértices con el mismo grado. Si el número de vértices es n los grados de los vértices serán 0, 1, 2, 3..., n-1. Pero si hay un vértice con grado 0 no puede haber otro con grado n-1.

En el caso de la fiesta, si cada invitado conoce a un número distinto de invitados habrá uno que no conoce a nadie. Entonces el que más gente conoce como mucho conocerá a n-2 personas (ni a sí mismo ni al que no conoce a nadie).

7.- Debo tomar al menos 60 mg de vitamina A y al menos 90 mg de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir pastillas de dos marcas diferentes, X e Y. Cada pastilla de la marca X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de vitamina B, y cada pastilla de la marca Y contiene 10 mg de cada vitamina. Además, no es conveniente tomar más de 8 pastillas diarias.

Sabiendo que cada pastilla de marca X cuesta 50 céntimos y que cada pastilla de marca Y cuesta 30 céntimos, calcule de forma razonada cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo y cuál es ese coste.

(Canarias 2006)

Solución: Las incógnitas son

x = *nº de pastillas marca X*

y = *nº de pastillas marca Y*

La función a minimizar $f = 50x+30y$ *lo que equivale a minimizar* $g = 5x+3y$

Las restricciones son

$10x + 10y \geq 60$ *vitamina A*

$15x + 10y \geq 90$ *vitamina B*

$x + y \leq 8$ *máximo de pastillas diarias*

Y, por supuesto, $x \geq 0$, $y \geq 0$ *enteros.*

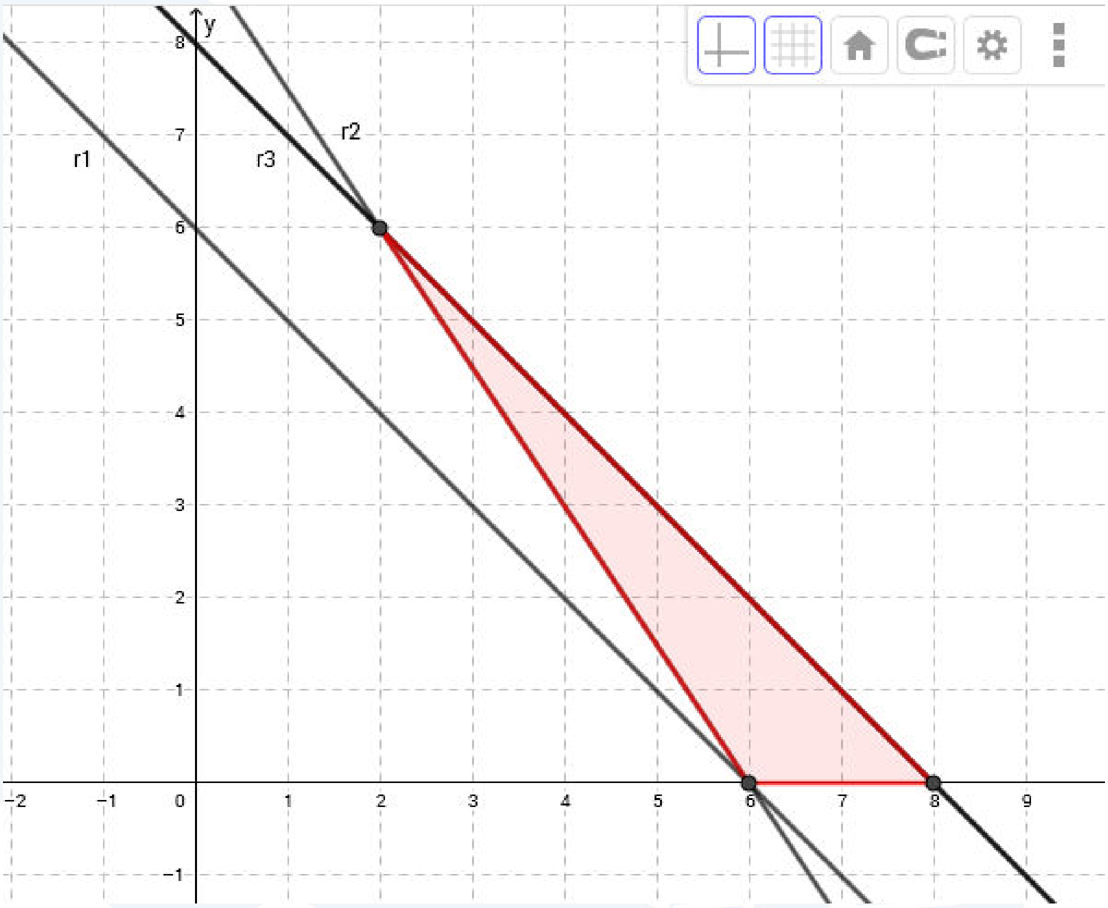
También se pueden simplificar a

$x + y \geq 6$ r1

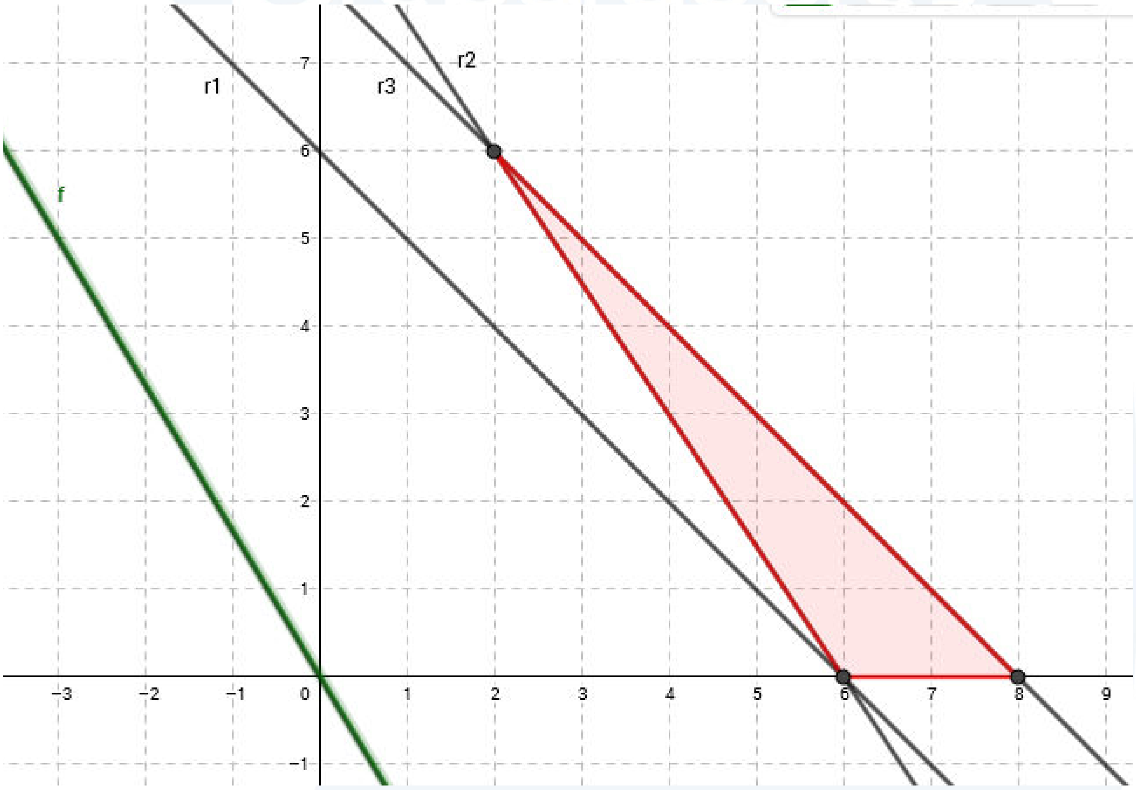
$3x + 2y \geq 18$ r2

$x + y \leq 8$ r3

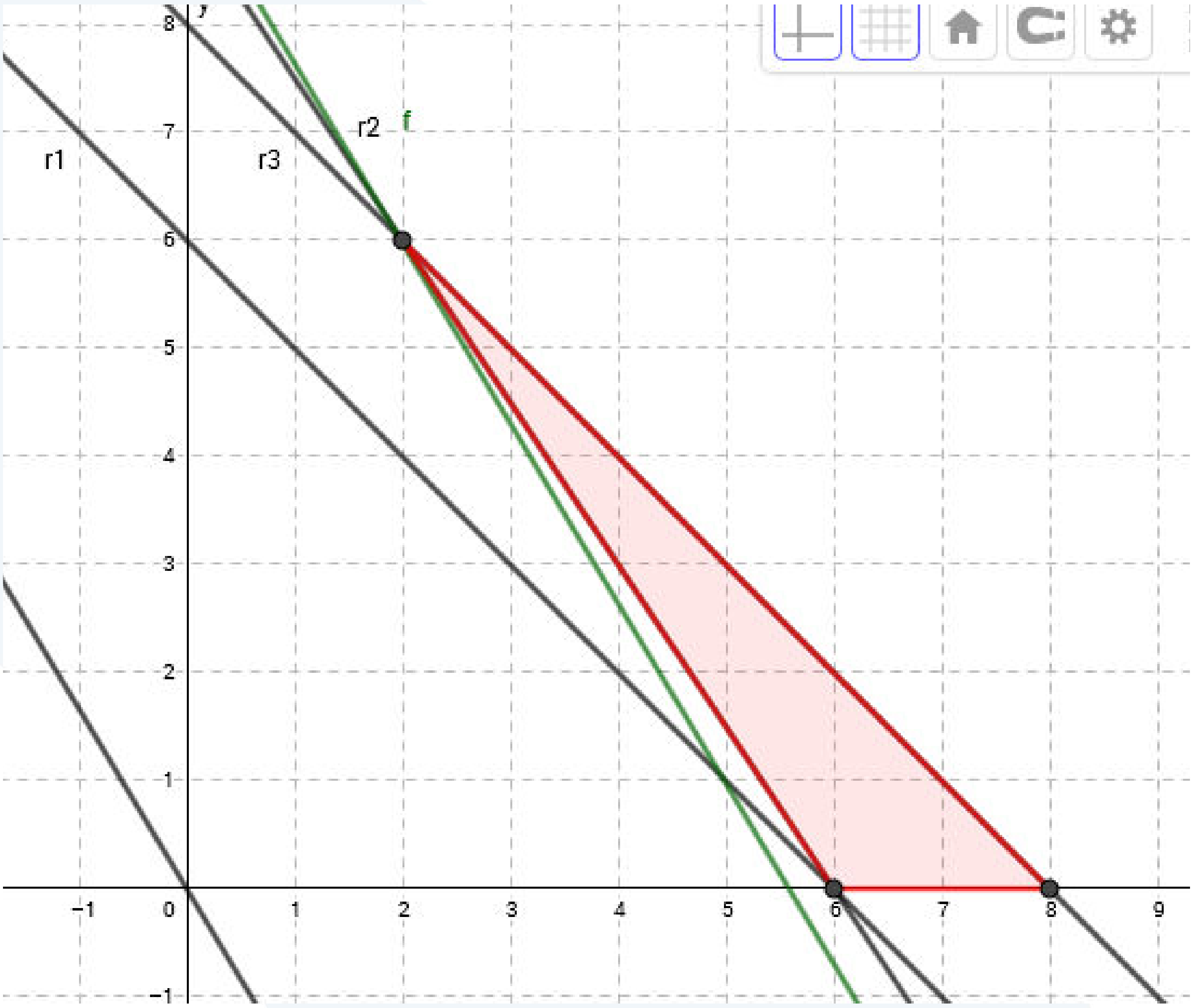
Representamos gráficamente estas restricciones como igualdades determinando cual de los semiplanos generados por cada una de ellas contiene la región factible. La intersección de los 3 semiplanos no da la región factible.



Representamos la función objetivo igualada a 0.



Se comprueba que la función crece al moverla hacia la región factible manteniendo la pendiente (de forma paralela). El primer punto de la región factible que alcance al moverla de esa manera será donde se alcance el coste mínimo de todas las soluciones que cumplen las restricciones.



En las imágenes se observa que dicho mínimo se alcanza en la intersección de las rectas r2 y r3. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dichas rectas se obtiene el punto x = 2 e y = 6. Sustituyendo estos valores en la función objetivo original f(2, 6)=50·2 + 30·6 = 280 céntimos de euro, es decir, 2,80 €.

Al hacer la representación gráfica a mano y desplazar la recta de la función objetivo es posible que no resulte clara la solución. En ese caso conviene obtener los puntos entre los que pueda haber duda que puedan ser los óptimos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes. En este caso se puede dudar entre el punto intersección de r2 y r3 y el punto de intersección de r2, r1 y la recta y = 0.Habría que resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes obteniendo los puntos (2, 6) y (6, 0). Al sustituir el la función objetivo original obtenemos

f(2, 6)=50·2 + 30·6 = 280

f(6, 0)=50·6 + 30·0 = 300

Por supuesto, elegimos el punto cuyo coste es mínimo.

Solución: 2 pastillas marca X y 6 de la marca Y. Coste 2,80€.

8.- Un IES encarga a un fabricante de ropa deportiva sudaderas y/o camisetas con el escudo del centro. El fabricante dispone de 750 m de algodón y 1000 m de poliéster. La confección de cada sudadera precisa de 1 m de algodón y 2 m de poliéster, mientras que cada camiseta requiere de 1,5 m de algodón y 1 m de poliéster. El precio de venta de cada sudadera es de 30 €, mientras que el de cada camiseta es de 24 €. ¿Qué número de sudaderas y/o camisetas debe suministrar para que la venta sea máxima?

Solución: Las incógnitas son

x = nº de sudaderas

y = nº de camisetas

La función a maximizar f = 30x+24y lo que equivale a minimizar g = 5x+4y

Las restricciones son

x + 1,5y ≤ 750 *algodón*

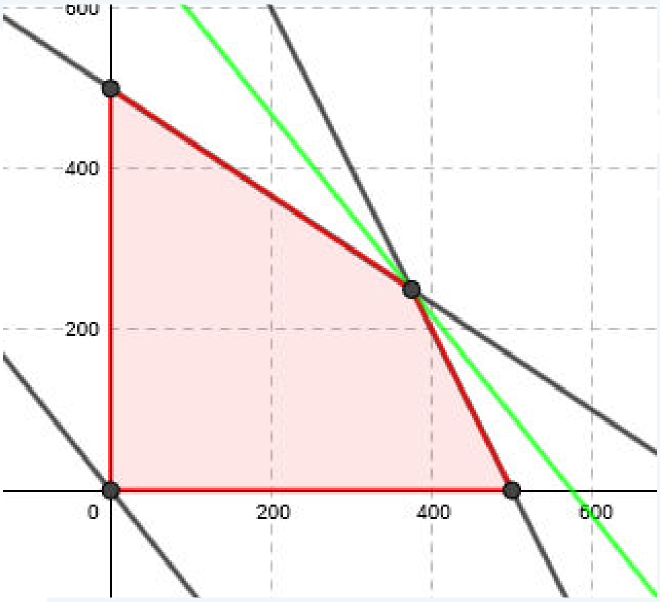
2x + y ≤ 1000 *poliéster*

Y, por supuesto, x ≥ 0, y ≥ 0 enteros.

Representamos gráficamente estas restricciones como igualdades determinando cual de los semiplanos generados por cada una de ellas contiene la región factible. La intersección de los 2 semiplanos no da la región factible.

Representamos la función objetivo igualada a 0.

Se comprueba que la función crece al moverla hacia la región factible manteniendo la pendiente (de forma paralela). Como queremos maximizar, el punto de la región factible más alejado que se alcance será donde se alcance el beneficio máximo de todas las soluciones que cumplen las restricciones. En este caso no parece haber duda de que se trata del punto de intersección de r1 y r2. Resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente se obtiene el punto x = 375 e y = 250. Sustituyendo estos valores en la función objetivo original f(375, 250)=30·375 + 24·250 = 17250 €.



Solución: 375 sudaderas y 250 camisetas.

9.- Un pequeño agricultor dispone de 480 m^2 y quiere plantar naranjos y/o perales sabiendo que cada naranjo necesita 16 m^2 y cada peral 4 m^2. El agricultor dispone de 720 horas de trabajo y se estima que cada naranjo requiere 12 h y cada peral 9 h. El beneficio de cada naranjo es de 300 € y el de cada peral 240 €. Encontrar la distribución idónea de su huerta para que el beneficio obtenido sea máximo.

Solución: Las incógnitas son

x = nº de naranjos

y = nº de perales

La función a maximizar f = 300x+240y lo que equivale a minimizar g = 5x+4y

Las restricciones son

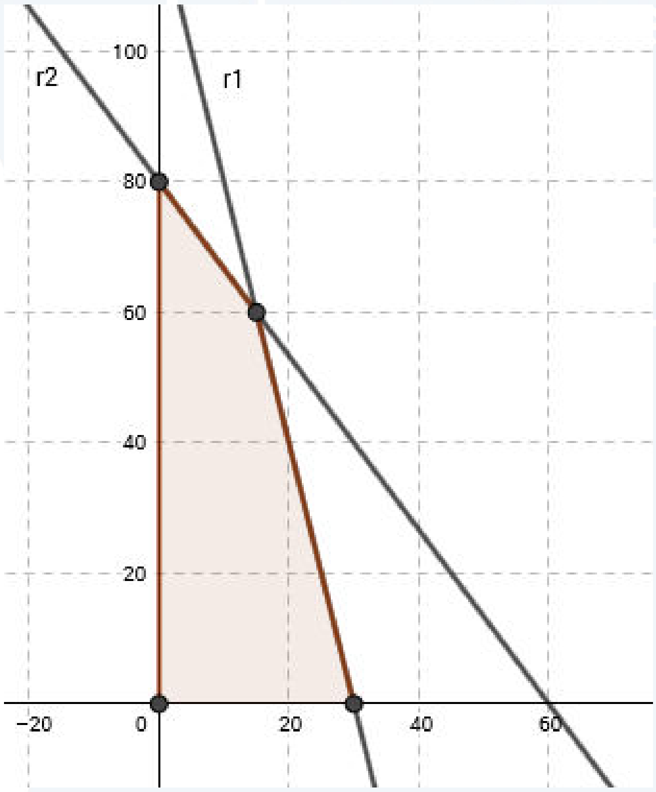
$16x + 4y \le 480$	*espacio*
$12x + 9y \le 720$	*tiempo*

Y, por supuesto, $x \ge 0$, $y \ge 0$ enteros.

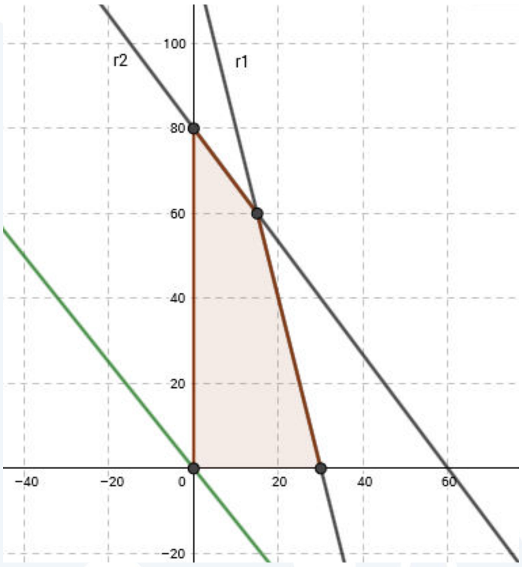
También se pueden simplificar a

$4x + y \le 120$	*espacio*
$4x + 3y \le 240$	*tiempo*

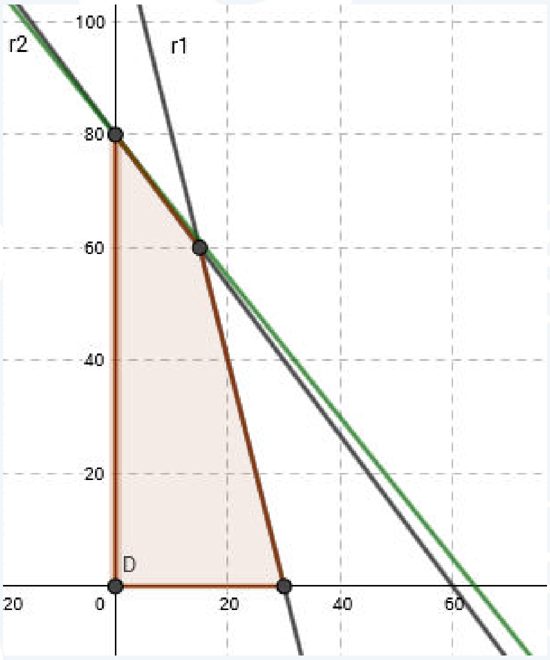
Representamos gráficamente estas restricciones como igualdades determinando cual de los semiplanos generados por cada una de ellas contiene la región factible. La intersección de los 2 semiplanos no da la región factible.



Representamos la función objetivo igualada a 0.



Al hacer la representación gráfica a mano y desplazar la recta de la función objetivo no resulta clara la solución.



En ese caso conviene obtener los puntos entre los que pueda haber duda que puedan ser los óptimos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes. En este caso se puede dudar entre el punto intersección de r1 y r2 y el punto de intersección de r2, y la recta x = 0.Habría que resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes obteniendo los puntos (0, 80) y (15, 60). Al sustituir el la función objetivo original obtenemos

f(0,80)=300·0 + 80·240 = 19200

f(15, 60)=300·15 + 60·240 = 18900

Por supuesto, elegimos el punto cuyo beneficio es máximo.

Solución: 0 naranjos y 80 perales.

10.- Halle el valor mínimo de la función $z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3$ condicionada por las restricciones lineales siguientes sobre las variables reales y no negativas x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 10} \\ \mathbf{x_2 + 2x_3 \leq 4} \\ \mathbf{-x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6} \end{cases}$$

(Com. Valenciana 2009)

Debemos convertir el problema en otro estandarizado en el que la función objetivo se deba minimizar y las restricciones se conviertan en igualdades con los términos independientes no negativos. Para ello, si debemos maximizar z multiplicamos la función objetivo por -1. Así resulta que maximizar z produce la misma solución que minimizar -z.

Las desigualdades se convierten en igualdades introduciendo variables de holgura. Si alguno de los términos independientes fuese negativo se multiplica dicha restricción por -1.

Así tenemos:

Minimizar $z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3$

con las restricciones

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10} \\ \mathbf{x_2 + 2x_3 + x_5 = 4} \\ \mathbf{-x_1 + 4x_2 + x_3 - x_6 = 6} \end{cases}$$

De tal manera que tenemos la matriz

$$\begin{array}{cccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De la que elegimos 3 variables (básicas) de tal manera que sus columnas correspondientes sean linealmente independientes. No todas las columnas se deben corresponder con las variables de holgura ni generar la matriz identidad. Por ejemplo, elegimos x_1, x_5 y x_6. Así, las matriz B es:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz inversa es

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que coincide con B.

La solución básica inicial la obtenemos al multiplicar B^{-1} por los términos independientes de las restricciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x1 = 10 \\ x5 = 4 \\ x6 = -16 \end{array}$$

Multiplicando B^{-1} por cada vector columna xi obtenemos los vectores columna yi

$$y_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad y_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$y_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} \qquad y_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$y_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad y_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Las y´es básicas deben formar la matriz identidad por construcción.

Recordemos que cada columna de las y´es se corresponde con las variables básicas x_1, x_5 y x_6. Si rellenamos las columnas con 0´s en las filas no básicas 2,3 y 4 obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&-6&-4&1&0&1\end{pmatrix}$$

que utilizamos para obtener los z_j multiplicando los coeficientes de la función objetivo por dicha matriz.

$$(8\quad 2\quad 4\quad 0\quad 0\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&-6&-4&1&0&1\end{pmatrix}=(8\quad 16\quad 24\quad -8\quad 0\quad 0)$$

Solo falta restar los coeficientes de la función objetivo para obtener los z_j- c_j

$$(8\quad 16\quad 24\quad -8\quad 0\quad 0)-(8\quad 2\quad 4\quad 0\quad 0\quad 0)=(0\quad 14\quad 20\quad -8\quad 0\quad 0)$$

Ya podemos formar la tabla del símplex con

$$x1=10 \quad x5=4 \quad x6=-16$$

$$y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} y_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix} y_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} y_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} y_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} y_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$z_j\text{-}\ c_j=(0\quad 14\quad 20\quad -8\quad 0\quad 0)$$

	y1	*y 2*	*y 3*	*y 4*	*y 5*	*y 6*	
$x1=10$	*1*	*2*	*3*	*-1*	*0*	*0*	
$x5=4$	*0*	*1*	*2*	*0*	*1*	*0*	
$x6=-16$	*0*	*-6*	*-4*	*1*	*0*	*1*	
	0	*14*	*20*	*-8*	*0*	*0*	

Iteración 1: De la última fila seleccionamos el elemento positivo más grande y con los elementos de su columna calculamos los cocientes entre la primera columna, la de las soluciones, y los elementos positivos de la columna seleccionada.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 10$	1	2	3	-1	0	0	10/3
$x5 = 4$	0	1	2	0	1	0	4/2
$x6 = -16$	0	-6	-4	1	0	1	
	0	14	20	-8	0	0	

Seleccionamos la fila cuyo cociente sea menor. Así obtenemos el elemento pivote que se encuentra en la intersección de la fila y la columna elegidas.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 10$	1	2	3	-1	0	0	
$x5 = 4$	0	1	2	0	1	0	4/2
$x6 = -16$	0	-6	-4	1	0	1	
	0	14	20	-8	0	0	

El elemento pivote marca la variable que sale y la que entra en la solución. De esta manera sale de la solución la variable x5 y entra x3.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 10$	1	2	3	-1	0	0	
$x3 = 4$	0	1	2	0	1	0	
$x6 = -16$	0	-6	-4	1	0	1	
	0	14	20	-8	0	0	

A partir de esta tabla se construye la tabla de la iteración siguiente. Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x3 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	

En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s. La primera fila se suma con la de la tabla anterior multiplicada por -3, que es el elemento a hacer 0.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 4$	1	1/2	0	-1	-3/2	0	
$x3 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	

Y así con todas incluso con la fila de los z_j- c_j obteniendo la tabla para iniciar la siguiente iteración.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 4$	1	1/2	0	-1	-3/2	0	
$x3 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	
$x6 = -8$	0	-4	0	1	2	1	
	0	4	0	-8	-10	0	

Iteración 2: Repetimos el proceso. El elemento positivo más grande de los z_j- c_j es 4, luego elegimos la 2ª columna, hacemos los cocientes y seleccionamos la fila con el cociente más bajo.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 4$	1	1/2	0	-1	-3/2	0	4/0,5=8
$x3 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	2/0,5=4
$x6 = -8$	0	-4	0	1	2	1	
	0	4	0	-8	-10	0	

El elemento pivote indica que sale x3 y entra x2 en la solución.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 4$	1	1/2	0	-1	-3/2	0	4/0,5=8
$x2 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	2/0,5=4
$x6 = -8$	0	-4	0	1	2	1	
	0	4	0	-8	-10	0	

Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En este caso se divide entre 1/2 o, lo que es lo mismo, multiplicamos por 2. En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 2$	1	0	-1	-1	-2	0	
$x2 = 4$	0	1	2	0	1	0	
$x6 = 8$	0	0	8	1	6	1	
	0	0	-8	-8	-14	0	

Iteración 3: Dado que todos los z_j- c_j son negativos o 0 hemos llegado a la solución óptima. Las variables que no aparecen en la tabla son 0´s. Además, sabemos que es única ya que todos los z_j- c_j correspondientes a las variables no básicas son estrictamente negativas.

$x1 = 2$
$x2 = 4$
$x6 = 8$

Estas dos últimas páginas, con un poco de soltura operando con matrices, se reducen a las siguientes tablas:

La inicial, sobre la que seleccionamos el elemento pivote y hacemos los cocientes.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 10$	1	2	3	-1	0	0	10/3
$x5 = 4$	0	1	2	0	1	0	4/2=2
$x6 = -16$	0	-6	-4	1	0	1	
	0	14	20	-8	0	0	

Tras hacer las operaciones de la primera iteración, la tabla queda así. Y volvemos a seleccionar el elemento pivote y a hacer los cocientes.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 4$	1	1/2	0	-1	-3/2	0	8
$x3 = 2$	0	1/2	1	0	1/2	0	4
$x6 = -8$	0	-4	0	1	2	1	
	0	4	0	-8	-10	0	

Quedando, tras la segunda iteración, así.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 2$	1	0	-1	-1	-2	0	
$x2 = 4$	0	1	2	0	1	0	
$x6 = 8$	0	0	8	1	6	1	
	0	0	-8	-8	-14	0	

Solución: $\mathbf{x_1 = 2, x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ z = 24}$

Caso Práctico

11.- Resuélvase el problema:

Minimizar z = $7x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 14x_4$

con las restricciones

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 10 \\ 5x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

De la misma manera que se ha indicado en el ejercicio 10 estandarizamos el problema.

Así tenemos:

Minimizar z = $7x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 14x_4$

con las restricciones

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 5x_2 - x_3 - 3x_4 + x_6 = 10 \end{cases}$$

De tal manera que tenemos la matriz

$$\begin{array}{cccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x1 = 5 \\ x5 = 5 \\ x6 = 10 \end{matrix}$$

De la que elegimos 3 variables (básicas) de tal manera que sus columnas correspondientes sean linealmente independientes. No todas las columnas se deben corresponder con las variables de holgura ni generar la matriz identidad. Por ejemplo, elegimos x_1, x_5 y x_6.Así, las matriz B es:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz inversa es

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que coincide con B.

La solución básica inicial la obtenemos al multiplicar B^{-1} por los términos independientes de las restricciones.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x1 = 5 \\ x5 = 5 \\ x6 = 10 \end{matrix}$$

Multiplicando B^{-1} por cada vector columna xi obtenemos los vectores columna yi

$$y_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$y_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ $y_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$

$y_5=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $y_6=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Las y´es básicas deben formar la matriz identidad por construcción.

Recordemos que cada columna de las y´es se corresponde con las variables básicas x_1, x_5 y x_6. Si rellenamos las columnas con 0´s en las posiciones no básicas 2,3 y 4 obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

que utilizamos para obtener los z_j multiplicando los coeficientes de la función objetivo por dicha matriz.

$$(7 \quad 9 \quad -5 \quad -14 \quad 0 \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}=(7 \quad 7 \quad 7 \quad -14 \quad 0 \quad 0)$$

Solo falta restar los coeficientes de la función objetivo para obtener los z_j- c_j

$$(7 \quad 7 \quad 7 \quad -14 \quad 0 \quad 0)-(7 \quad 9 \quad -5 \quad -14 \quad 0 \quad 0)=(0 \quad -2 \quad 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Ya podemos formar la tabla del simplex con

$x1=5$
$x5=5$
$x6=10$

$y=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} y_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix} y_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} y_4=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -3\end{pmatrix} y_5=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} y_6=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

z_j- $c_j=(0 \quad -2 \quad 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1=5$	1	1	1	-2	0	0	
$x5=5$	0	-2	1	1	1	0	
$x6=10$	0	5	-1	-3	0	1	
	0	-2	12	0	0	0	

Iteración 1: De la última fila seleccionamos el elemento positivo más grande y con los elementos de su columna calculamos los cocientes entre la primera columna, la de las soluciones, y los elementos positivos de la columna seleccionada.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1=5$	1	1	1	-2	0	0	5/1=5
$x5=5$	0	-2	1	1	1	0	5/1=5
$x6=10$	0	5	-1	-3	0	1	
	0	-2	12	0	0	0	

Seleccionamos la fila cuyo cociente sea menor. Así obtenemos el elemento pivote que se encuentra en la intersección de la fila y la columna elegidas.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 5$	1	1	1	-2	0	0	
$x5 = 5$	0	-2	1	1	1	0	
$x6 = 10$	0	5	-1	-3	0	1	
	0	-2	12	0	0	0	

El elemento pivote marca la variable que sale y la que entra en la solución. De esta manera sale de la solución la variable x5 y entra x3.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	y 6	
$x1 = 5$	1	1	1	-2	0	0	
$x3 = 5$	0	-2	1	1	1	0	
$x6 = 10$	0	5	-1	-3	0	1	
	0	-2	12	0	0	0	

A partir de esta tabla se construye la tabla de la iteración siguiente. Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En nuestro caso ya lo tenemos.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x3 = 5$	0	-2	1	1	1	0	

En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s. La primera fila se suma con la de la tabla anterior multiplicada por -1, que es el elemento a hacer 0.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x1 = 0$	1	3	0	-3	-1	0	
$x3 = 5$	0	-2	1	1	1	0	

Y así con todas incluso con la fila de los z_j- c_j obteniendo la tabla para iniciar la siguiente iteración.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x1 = 0$	1	3	0	-3	-1	0	0
$x3 = 5$	0	-2	1	1	1	0	
$x6 = 15$	0	3	0	-2	1	1	15/3
	0	22	0	-12	-12	0	

Iteración 2: Repetimos el proceso. El elemento positivo más grande de los z_j- c_j es 22, luego elegimos la 2ª columna, hacemos los cocientes y seleccionamos la fila con el cociente más bajo.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x1=0$	1	3	0	-3	-1	0	0
$x3=5$	0	-2	1	1	1	0	
$x6=15$	0	3	0	-2	1	1	15/3
	0	22	0	-12	-12	0	

El elemento pivote indica que sale x1 y entra x2 en la solución.

Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En este caso se divide entre 3. En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x2=0$	1/3	1	0	-1	-1/3	0	
$x3=5$	2/3	0	1	-1	1/3	0	
$x6=15$	-1	0	0	1	2	1	
	-22/3	0	0	10	-14/3	0	

Iteración 3: Repetimos el proceso. El elemento positivo más grande de los z_j- c_j es 22, luego elegimos la 2ª columna, hacemos los cocientes y seleccionamos la fila con el cociente más bajo.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x2=0$	1/3	1	0	-1	-1/3	0	
$x3=5$	2/3	0	1	-1	1/3	0	
$x6=15$	-1	0	0	1	2	1	15/1
	-22/3	0	0	10	-14/3	0	

El elemento pivote indica que sale x6 y entra x4 en la solución.

Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En este caso se divide entre 1. En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s.

	x1	X2	X3	X4	X5	X6	
$x2=15$	-2/3	1	0	0	5/3	1	
$x3=20$	-1/3	0	1	0	7/3	1	
$x4=15$	-1	0	0	1	2	1	
	8/3	0	0	0	-74/3	-10	

Iteración 4: Elegimos la primera columna por ser la única cuyo z_j- c_j es positivo. Pero todos los elementos de dicha columna son negativos. Esto ocurre cuando no hay solución óptima.

Solución: No hay solución óptima

12.- Resuélvase el problema:

Maximizar z = x_4 - x_1

con las restricciones

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_4 = 4 \\ x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

De la misma manera que se ha indicado en el ejercicio 10 estandarizamos el problema.

Así tenemos:

Minimizar z = x_1 - x_4

con las restricciones iniciales.

De tal manera que tenemos la matriz

$$\begin{array}{ccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De la que elegimos 3 variables (básicas) de tal manera que sus columnas correspondientes sean linealmente independientes. No todas las columnas se deben corresponder con las variables de holgura ni generar la matriz identidad. Por ejemplo, elegimos x_2, x_3 *y* x_4. *Así, las matriz B es:*

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz inversa es

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución básica inicial la obtenemos al multiplicar B^{-1} *por los términos independientes de las restricciones.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x2 = 2 \\ x3 = 5 \\ x4 = 1 \end{array}$$

Multiplicando B^{-1} *por cada vector columna xi obtenemos los vectores columna yi*

$$y_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las y´es básicas deben formar la matriz identidad por construcción.

Recordemos que cada columna de las y´es se corresponde con las variables básicas x_2, x_3 y x_4. Si rellenamos las columnas con 0´s en las posiciones no básicas 1 y 4 obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que utilizamos para obtener los z_j multiplicando los coeficientes de la función objetivo por dicha matriz.

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1)$$

Solo falta restar los coeficientes de la función objetivo para obtener los z_j- c_j

$$(2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1) - (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)$$

Ya podemos formar la tabla del símplex con

$$x2 = 2 \quad x3 = 5 \quad x4 = 1$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_j\text{- } c_j = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)$$

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x2 = 2$	1	1	0	0	-2	
$x3 = 5$	2	0	1	0	-1	
$x4 = 1$	-2	0	0	1	1	
	1	0	0	0	-1	

Iteración 1: De la última fila seleccionamos el elemento positivo más grande y con los elementos de su columna calculamos los cocientes entre la primera columna, la de las soluciones, y los elementos positivos de la columna seleccionada.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x2 = 2$	1	1	0	0	-2	2/1
$x3 = 5$	2	0	1	0	-1	5/2
$x4 = 1$	-2	0	0	1	1	
	1	0	0	0	-1	

Seleccionamos la fila cuyo cociente sea menor. Así obtenemos el elemento pivote que se encuentra en la intersección de la fila y la columna elegidas.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x2 = 2$	1	1	0	0	-2	2/1

$x3 = 5$	2	0	1	0	-1	5/2
$x4 = 1$	-2	0	0	1	1	
	1	0	0	0	-1	

El elemento pivote marca la variable que sale y la que entra en la solución. De esta manera sale de la solución la variable x5 y entra x3.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x1 = 2$	1	1	0	0	-2	
$x3 = 5$	2	0	1	0	-1	
$x4 = 1$	-2	0	0	1	1	
	1	0	0	0	-1	

A partir de esta tabla se construye la tabla de la iteración siguiente. Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En nuestro caso ya lo tenemos.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x1 = 2$	1	1	0	0	-2	

En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s. La segunda fila se suma con la de la tabla anterior multiplicada por -2, que es el elemento a hacer 0. Y así con todas incluso con la fila de los z_j- c_j obteniendo la tabla para iniciar la siguiente iteración.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x1 = 2$	1	1	0	0	-2	
$x3 = 1$	0	-2	1	0	3	
$x4 = 5$	0	2	0	1	-3	
	0	-1	0	0	1	

Iteración 2: Repetimos el proceso. El elemento positivo más grande de los z_j- c_j es 1, luego elegimos la 5ª columna, hacemos los cocientes y seleccionamos la fila con el cociente más bajo.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x1 = 2$	1	1	0	0	-2	
$x3 = 1$	0	-2	1	0	3	1/3
$x4 = 5$	0	2	0	1	-3	
	0	-1	0	0	1	

El elemento pivote indica que sale x3 y entra x5 en la solución.

Se divide toda la fila seleccionada entre el elemento pivote para obtener un 1 en esa posición. En este caso ya lo tenemos. En el resto de la columna seleccionada tenemos que convertir todos los elementos en 0´s.

	y1	y 2	y 3	y 4	y 5	
$x1 = 8/3$	1	-1/3	2/3	0	0	
$x5 = 1/3$	0	-2/3	1/3	0	1	
$x4 = 6$	0	0	1	1	0	
	0	-1/3	-1/3	0	0	

Iteración 3: Dado que todos los z_j- c_j son negativos o 0 hemos llegado a la solución óptima. Las variables que no aparecen en la tabla son 0´s. Además, sabemos que es única ya que todos los z_j- c_j correspondientes a las variables no básicas son estrictamente negativas.

Solución: $\mathbf{x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 0,\ x_3 = 0, x_4 = 6,\ x_5 = \frac{1}{3},\ z = \frac{10}{3}}$