TEMA 42: Las rentas. Concepto de valor actual y valor final. Clasificación. Análisis de los tipos de rentas.

Autor: Gabriel Rodríguez Martínez

Esquema:

1. - INTRODUCCIÓN

Los ejemplos de rentas en el ámbito financiero aparecen como corrientes de pagos (desde la óptica del deudor) o de cobros (desde la perspectiva del acreedor), en vencimientos sucesivos, que tienen su origen en la adquisición al contado (por parte del deudor) de un bien material que puede ser monetario (préstamo), inmovilizado o mercancía.

La financiación mediante una renta permite la compraventa a plazos de bienes materiales (vivienda, vehículo, etc.) que no se podrían adquirir al contado por no disponer de suficiente liquidez para abonar el importe en el momento de la adquisición.

En este tema se expone de forma resumida los contenidos sobre el concepto de renta la valoración en unidades monetarias y el proceso operativo.

Los cálculos financieros se pueden realizar utilizando cualquiera de las leyes financieras conocidas (capitalización simple o compuesta, descuento simple o compuesto). Normalmente las operaciones financieras de renta se contratan a un plazo superior al año y se consigue optimizar la rentabilidad del acreedor si se aplica la *ley de capitalización compuesta* (ver segunda y cuarta conclusión del tema 41) en los cálculos financieros que permiten cuantificar el valor actual, final o los vencimientos sucesivos.

2.- LAS RENTAS:

2.1. - Concepto de renta desde el punto de vista financiero.

Toda inversión en activos rentables se hace con la finalidad de conseguir un flujo de beneficios que se materializa como diferencia positiva entre la corriente de cobros (retribuciones) y la de pagos (desembolsos) con vencimientos sucesivos (equidistantes o no) a lo largo de un período determinado. En este sentido se puede presentar la renta como una distribución de capitales a lo largo de una serie de subintervalos de tiempo de tal manera que entre el conjunto de capitales y el de subintervalos existe una correspondencia biunívoca tal como señala el profesor Lorenzo Gil Peláez[1].

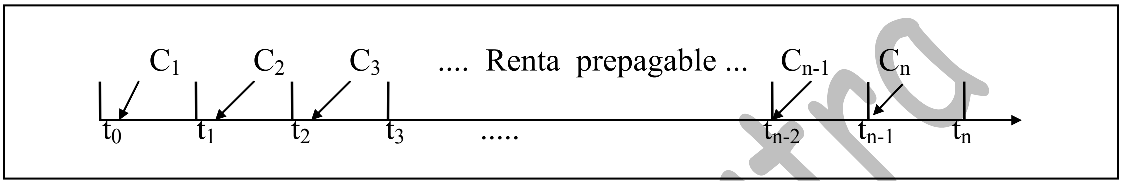
F.nº 1: Secuencia de capitales y subintervalos

[1] Matemática de las operaciones financieras. Ed. Rodagraf,SA. Madrid 1982 , pag. 235 y siguientes

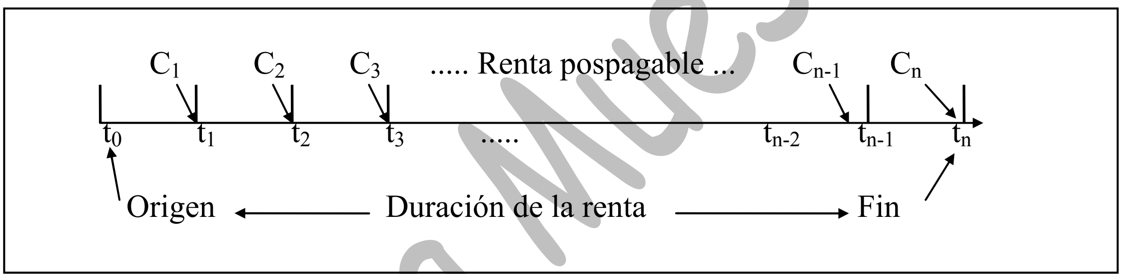
El mismo profesor denomina "***término de la renta***" a cada uno de los capitales (C_1, C_2, ..., C_n) que componen la renta y que tienen la característica de nacer, madurar y materializarse a lo largo del subintervalo de tiempo al que pertenecen (denominado "***período de maduración***").

La materialización o vencimiento del término de la renta se puede producir en cualquiera de los puntos que componen el intervalo. Con el ánimo de simplificar los cálculos financieros se conviene que el vencimiento se produzca al principio o al final del subintervalo.

La renta toma el calificativo de *"**prepagable**"* si sus términos vencen al inicio de los subintervalos, mientras que si lo hacen al final se llama *"**pospagable**"*.



F.nº 2: Secuencia de capitales con vencimiento al inicio del subintervalo



F.nº 3: Secuencia de capitales con vencimiento al final del subintervalo

La duración de la renta queda comprendida entre el origen y el final cuyo intervalo se mide por la diferencia: $t_n - t_0$.

3. - CLASIFICACIÓN

Entre el acreedor y el deudor se pueden convenir operaciones financieras con muy diferentes matices y criterios. Según se ponderen unos u otros se pueden obtener diversos subconjuntos de las rentas que permiten la siguiente clasificación:

3.1 Atendiendo a la cuantía de sus términos:

a) **Renta constante**. Si la cuantía de sus términos no varía
Es decir si $C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_n = C$.
Cuando C = 1 la renta se denomina unitaria

b) **Renta variable**. Si la cuantía de sus términos es distinta.
Es decir si $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq ... \neq C_n$
La variación puede seguir una ley conocida (*renta variable en progresión aritmética* o en progresión geométrica) o desconocida, en este caso se denomina *renta variable irregular.*

3.2 Atendiendo a la amplitud de los subintervalos.

a) **Renta discreta**. Cuando la duración del subintervalo tiene medida finita (un mes, un trimestre, un año, etc.).

b) **Renta continua**. Cuando la duración del subintervalo tiene medida infinitesimal (es decir tiende a cero).

3.3 Atendiendo a la duración de la renta.

a) **Renta temporal**. Si tiene origen y final en fecha concreta.

b) **Renta perpetua**. Si tiene origen en fecha concreta y final indefinido

3.4 Atendiendo al vencimiento o efectividad de los términos:

a) Renta prepagable. (Ver figura número 2)

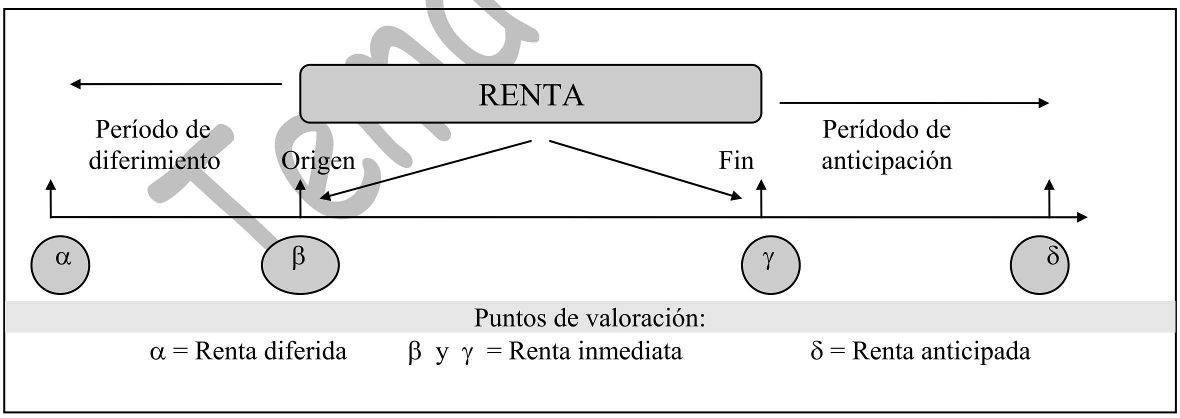
b) Renta pospagable. (Ver figura número 3)

3.5 Atendiendo al momento o punto del tiempo que se toma como referencia para valorar la renta en unidades monetarias. Este momento se puede situar antes del origen, en el origen, en el final y después del final. Siendo:

a) Renta inmediata. Cuando el punto de valoración se sitúa en el origen o en el final de la renta.

b) Renta diferida. Si el punto de valoración es anterior al origen de la renta.

c) Renta anticipada. Si el punto de valoración se sitúa después de finalizar la renta



F.nº 4 Tipos de rentas en función del punto de valoración

3.6 Atendiendo a los capitales de la prestación y contraprestación.

a) **Renta unilateral**. El acreedor realiza la prestación en un sólo vencimiento mientras que el deudor contrapresta con un conjunto de capitales que tienen vencimientos sucesivos.[2]

b) Renta bilateral. Acreedor y deudor intercambian capitales a lo largo del contrato de relación financiera

[2] En lo sucesivo los cálculos financieros sobre rentas siempre se considerarán bajo este supuesto

4. - CONCEPTO DE VALOR ACTUAL Y VALOR FINAL.

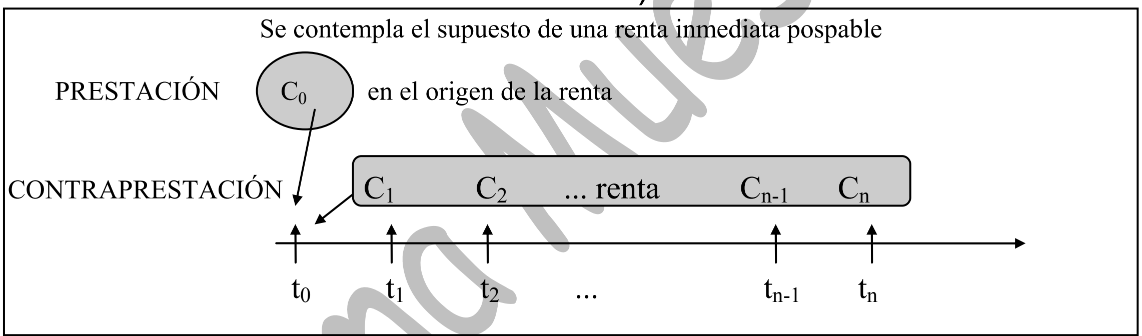
4.1 Valor financiero de la renta.

En la introducción se comentó que el objetivo financiero de una renta es establecer el punto de equilibrio (equivalencia de capitales e intereses) entre la prestación (capital aportado por el acreedor) y la contraprestación (renta deudora) que permita firmar un acuerdo entre acreedor y deudor. Los dos momentos importantes para valorar la renta son:

* Cuando se firma el contrato entre acreedor y deudor que, normalmente, marca el origen de la renta. Es este momento cuando el acreedor hace entrega de la prestación al deudor (habitualmente en un único pago).
* Cuando finaliza la relación contractual. En este momento al deudor le puede interesar conocer a cuánto asciende el valor financiero (capitales e intereses) de los pagos realizados durante la vida de la renta.

4.2 Valor actual.

Desde el punto de vista financiero se llama *valor actual o inicial* al que se obtiene de aplicar una ley financiera sobre la renta (corriente de capitales asociados a sus vencimientos sucesivos).

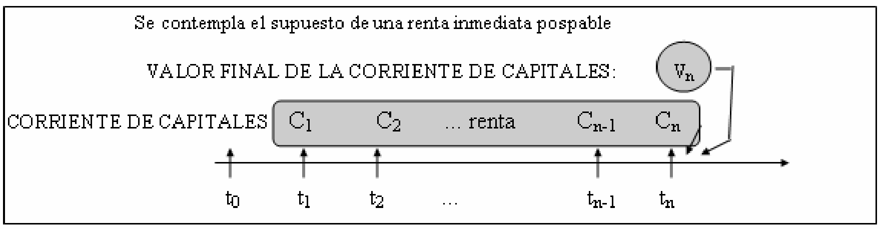


F.nº 5 Valor actual de una renta pospagable

Para calcular el valor actual de la renta sería lógico utilizar la ley financiera del *descuento comercial compuesto*. Pero en función de las conclusiones segunda y cuarta del tema 41 se aplica la ley de actualización compuesta $\boxed{C_0 = C_n(1+i)^{-n}}$ Por tanto el valor actual es: $\boxed{V_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j(1+i)^{-j}}$ F1

4.3 Valor final.

Desde el punto de vista financiero se llama *valor final* al que se obtiene de aplicar una ley financiera sobre la renta. Siendo lógico aplicar la ley de capitalización compuesta (ver apartado 5º del tema 41) $\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$



F.nº 6 Valor final de una renta pospagable

Si se aplica la capitalización compuesta el valor final será:

$$\boxed{V_n = \sum_{j=1}^{n} C_j (1+i)^{n-j}} \quad \text{F2}$$

5. - ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE RENTAS

Se inicia el estudio de los diferentes tipos de rentas. Para no perderse, en el farragoso bosque de las rentas con sus variables y fórmulas, se propone, a modo de guía didáctica, el cuadro esquemático que sigue. Se advierte que el lector puede elaborar y personalizar su propio cuadro.

RENTA	TÉRMINOS	SUBINTERVALOS	DURACIÓN	VENCIMIENTO DE LOS TÉRMINOS	MOMENTO DE VALORACIÓN
RENTAS TIPO A	CONSTANTE	a) DISCRETA b) FRACCIONADA	TEMPORAL	POS	V.A V.A.R.D
				PRE	V.F. V.F.R.A
			PERPETUA	POS	V.A
				PRE	V.A.R.D
		CONTINUA 0 CUASI CONTINUA	TEMPORAL	el pos y el pre es indiferente	V.A V.A.R.D V.F. V.F.R.A
			PERPETUA	pos y pre indiferente	V.A V.A.R.D
	VARIABLE según ley de progresión conocida a) Aritmética b) Geométrica	a) DISCRETA b) FRACCIONADA	TEMPORAL	POS	V.A V.A.R.D
				PRE	V.F. V.F.R.A
			PERPETUA	POS	V.A
				PRE	V.A.R.D
		CONTINUA	TEMPORAL	el pos y el pre es indiferente	V.A V.A.R.D V.F. V.F.R.A
			PERPETUA	pos y pre indiferente	V.A V.A.R.D
RENTAS TIPO B	OTRAS	UNILATERALES			
		BILATERALES			
		IRREGULARES			

La traducción de las siglas que se proponen es:

V.A.	Valor actual
V.A.R.D	Valor actual de una renta diferida
V.F.	Valor final
V.F.R.A.	Valor final de una renta anticipada

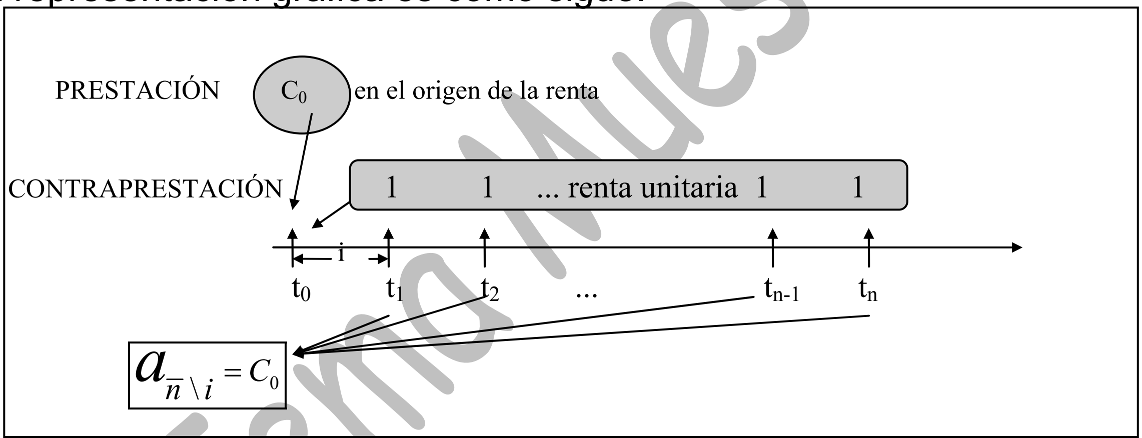
Si se desea obtener una fórmula para ser aplicada de con carácter general se ha de forzar las condiciones del contrato mercantil que liga al acreedor y al deudor. En las rentas tipo B (del esquema anterior) se hace pacto implícito de las siguientes condiciones:

- La duración de los subintervalos es constante
- El tanto de interés permanece constante para toda la duración de la renta.

5.1. Renta constante, discreta, temporal y pospagable

a) Valor actual de una renta unitaria (VA = $a_{\overline{n}\backslash i}$)

La representación gráfica es como sigue:



F.nº 7 Valor actual de una renta unitaria, discreta, temporal y pospagable

La actualización de los términos unitarios la renta al momento inicial (cero) adopta la siguiente expresión financiera:

$$a_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$

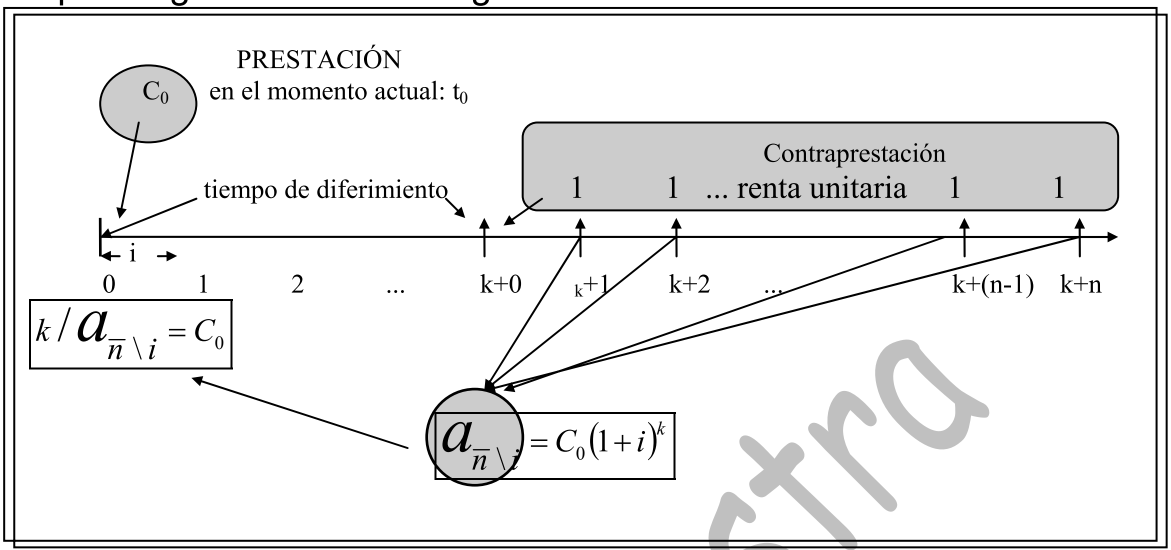
Cómo es lógico habrá que simplificar la expresión anterior para hacerla operativa. A tal fin se aplica la fórmula de la progresión geométrica cuando la razón es menor que la unidad ya que: $(1+i)^{-1} < 1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}}$

La fórmula se aplica tal cual se lee. El primer término es $(1+i)^{-1}$ que también es la razón. El último término es $(1+i)^{-n}$, luego la fórmula simplificada queda:

$$a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{\frac{1}{1+i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{luego} \quad \boxed{a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \quad \text{F3}$$

b) Valor actual de la renta unitaria cuando es diferida (VARD $_{k/}a_{\overline{n}\backslash i}$).

Al ser diferida la renta tiene su punto de valoración anterior a su origen. El esquema gráfico es como sigue:

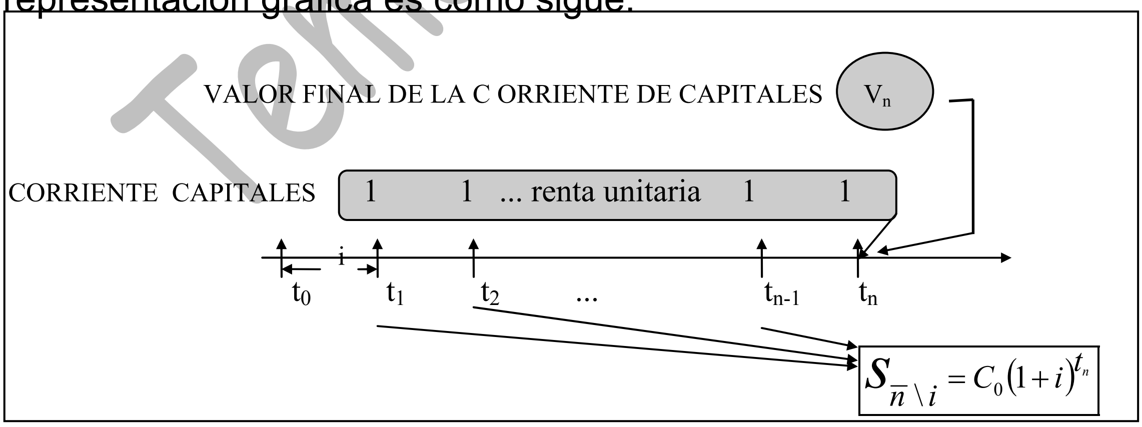


F.nº 8 Valor actual de una renta unitaria, discreta, temporal, diferida y pospagable

Prestando atención a la gráfica se concluye fácilmente que la fórmula para VARD es $\boxed{_{k/}a_{\overline{n}\backslash i} = a_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{-k}}$ F4 pues se actualiza el valor de la renta en "k" subintervalos de tiempo

c) Valor final de la renta unitaria (VF = $s_{\overline{n}\backslash i}$)

La representación gráfica es como sigue:



F.nº 9 Valor final de una renta unitaria, discreta, temporal y pospagable

El valor final de los términos unitarios de la renta al momento final (t_n) adopta la siguiente expresión financiera:

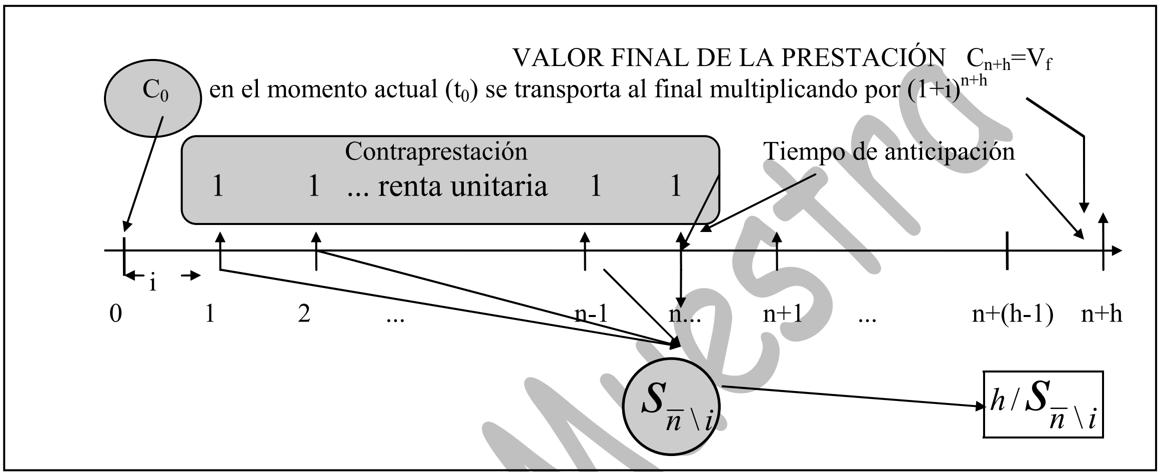
$s_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^1 + 1$ (progresión geométrica de razón $(1+i)^1 > 1$)

Cómo es lógico habrá que simplificar la expresión anterior para hacerla operativa. A tal fin se aplica la fórmula de la progresión geométrica cuando la razón es mayor que la unidad $\Rightarrow \boxed{S=\frac{a_n r-a_1}{r-1}}$ puesto que

La fórmula se aplica tal cual se lee. El primer término es 1, el ultimo es $(1+i)^{n-1}$ y la razón es $(1+i)^1$.

$$S_{\overline{n}\backslash i}=\frac{(1+i)^{n-1}(1+i)^1-1}{(1+i)^1-1}=\frac{(1+i)^n-1}{i} \quad \text{luego} \quad \boxed{S_{\overline{n}\backslash i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}} \quad \text{F5}$$

d) Valor final de la renta unitaria cuando es anticipada (VFRA).
Al ser anticipada la renta tiene su punto de valoración posterior a su término. El esquema gráfico es como sigue:

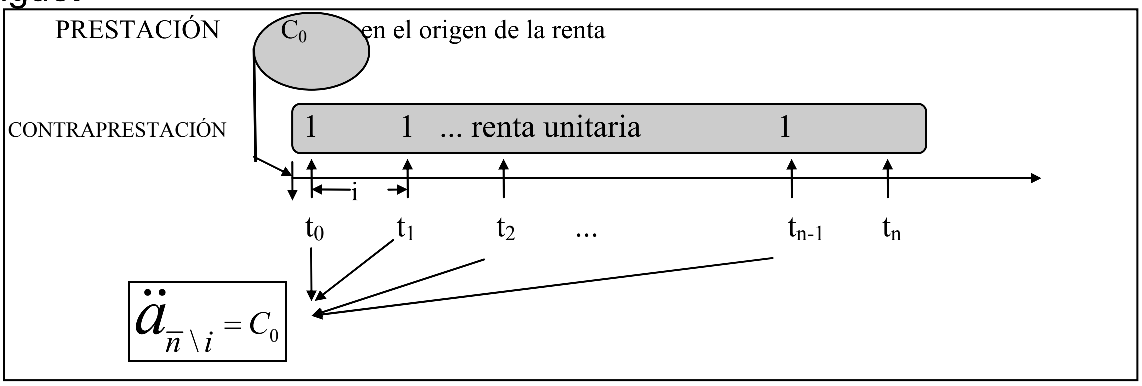


F.nº 10 Valor final de una renta unitaria, discreta, temporal, diferida y pospagable

Prestando atención a la gráfica se concluye fácilmente que la fórmula para VFRA es $\boxed{h/S_{\overline{n}\backslash i}=S_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^h}$ F6 pues se capitaliza en "h" subintervalos de tiempo el valor de la renta en el momento n

5.2. Renta constante, discreta, temporal y prepagable

a) Valor actual de una renta unitaria (VA = $\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i}$): su gráfica es como sigue:



F.nº 11 Valor actual de una renta unitaria, discreta, temporal y prepagable

La actualización de los términos unitarios de la renta al momento inicial (cero) adopta la siguiente expresión financiera:

$$\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = 1+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{-(n-1)}$$

suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$
(observar en la gráfica que el primer término no necesita ser actualizado)

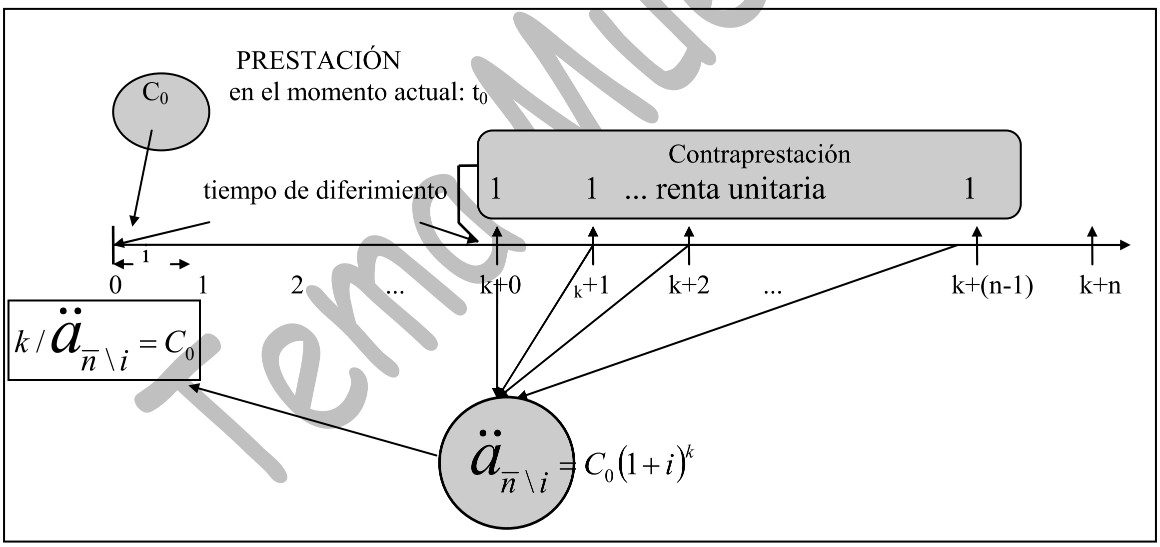
A semejanza de lo estudiado en el subepígrafe 5.1.a) se simplifica la expresión anterior para hacerla operativa

$$\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{luego}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \text{ F6} \qquad \text{o lo que es igual} \qquad \boxed{\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)\,a_{\overline{n}\backslash i}} \text{ F7}$$

b) Valor actual de la renta unitaria cuando es diferida (VARD $k/a_{\overline{n}\backslash i}$).

Al ser diferida la renta tiene su punto de valoración anterior a su origen. El esquema gráfico es como sigue:

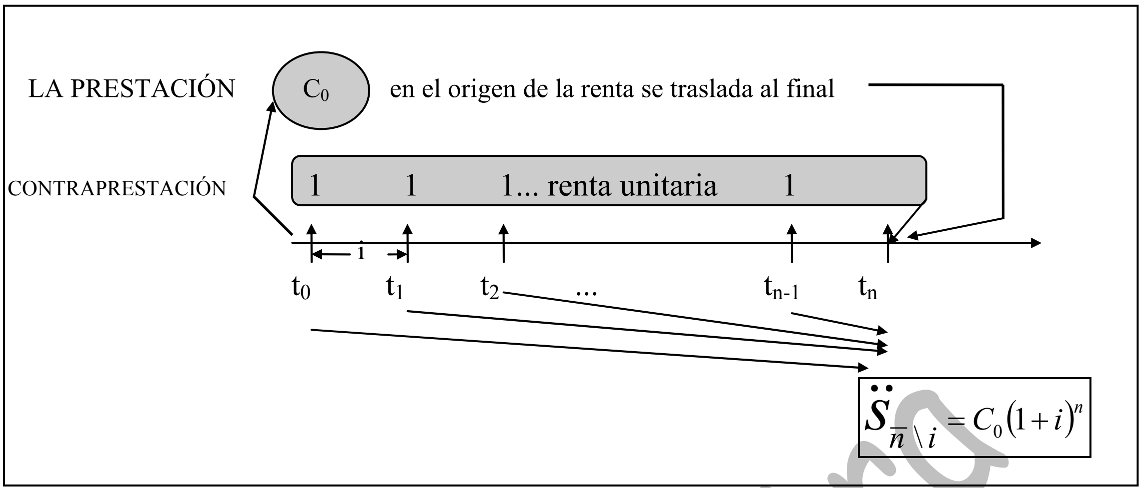


F.nº 12 Valor actual de una renta unitaria, discreta, temporal, diferida y prepagable

Prestando atención a la gráfica se concluye fácilmente que la fórmula para VARD es $\boxed{k/\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = \ddot{a}_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{-k}}$ F8 pues se actualiza el valor de la renta inmediata y prepagable en en "k" subintervalos de tiempo

c) Valor final de la renta unitaria (VF = $\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i}$)

La representación gráfica es como sigue:



F.nº 13 Valor final de una renta unitaria, discreta, temporal y prepagable

El valor final de los términos unitarios la renta al momento final (t_n) adopta la siguiente expresión financiera: $\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^1$

suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^1 > 1$

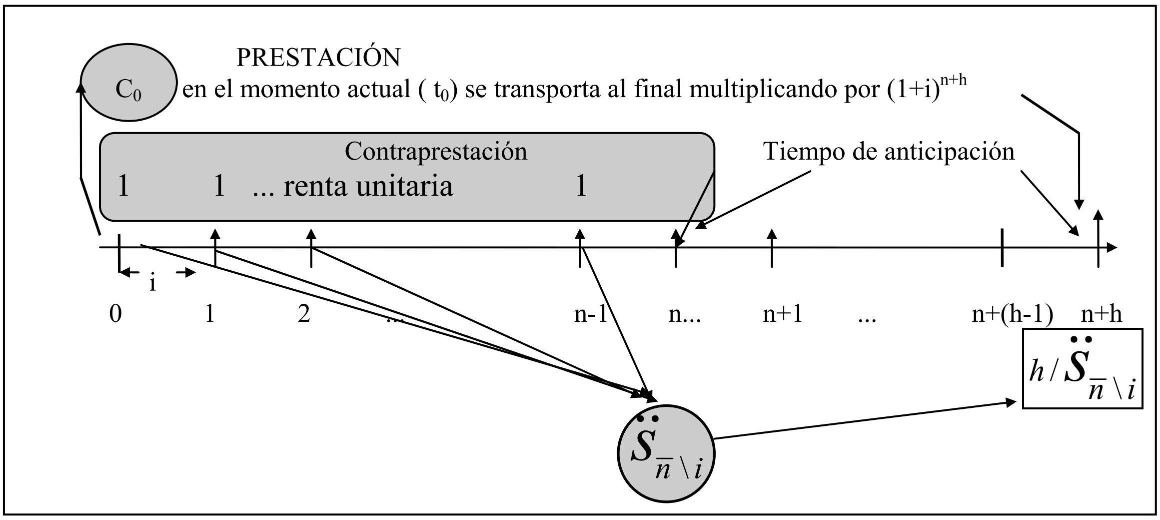
Cómo es lógico habrá que simplificar siguiendo los pasos del epígrafe 5.1.c)

$$\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = \frac{(1+i)^n(1+i)^1 - (1+i)^1}{(1+i)^1 - 1} = (1+i)\frac{[(1+i)-1]}{i} \quad \text{luego} \quad \boxed{\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad \text{F9}$$

La expresión anterior toma la forma siguiente: $\boxed{\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)S_{\overline{n}\backslash i}}$

d) Valor final de la renta unitaria cuando es anticipada (VFRA $\boxed{h/\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i}}$).

Por ser anticipada la renta el punto de valoración se sitúa en un momento posterior del final (de la renta). El esquema gráfico es como sigue:



F.nº 14 Valor final de una renta unitaria, discreta, temporal, anticipada y prepagable

Prestando atención a la gráfica se concluye fácilmente que la fórmula para VFRA es $\boxed{h/\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = \ddot{S}_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{h} = S_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{h+1}}$ F10
pues se capitaliza el valor de la renta en "h" subintervalos de tiempo

5.3 Relación entre la renta pos y pre y entre el valor final y el actual
Los cálculos anteriores se pueden simplificar si se tiene en cuanta que en capitalización compuesta se pueden trasladar los capitales desde el presente al futuro con la ley de capitalización $(1+i)^{(t_n - t_0)}$ Cuando se desee trasladar al presente un capital nominal situado en el futuro se utiliza la ley financiera de actualización $(1+i)^{-(t_n - t_0)}$

a) Relación entre pre y pos.

$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = a_{\overline{n}\backslash i}(1+i)}$ F10 y también $\boxed{\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = S_{\overline{n}\backslash i}(1+i)}$ F11

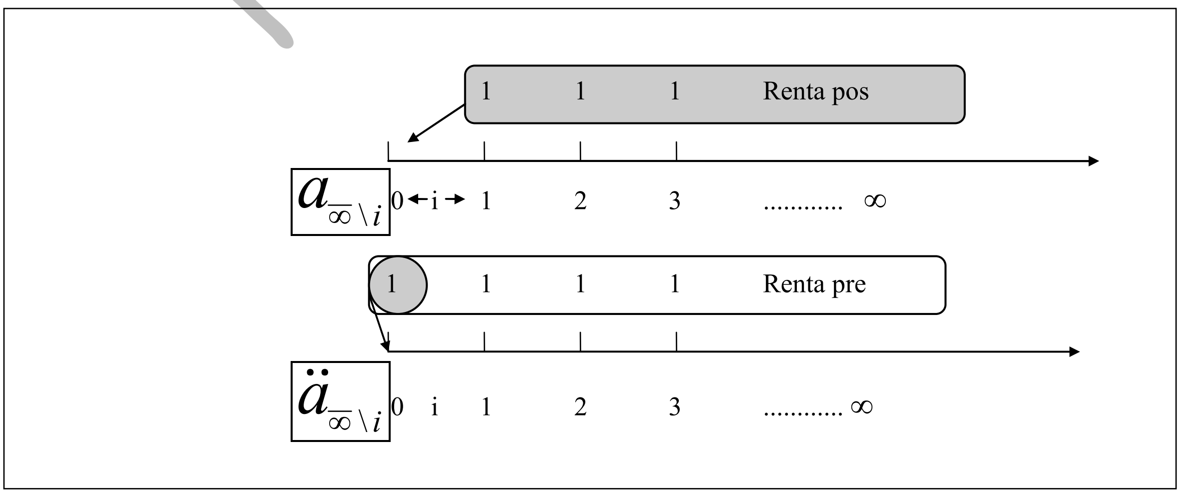
La relación entre pos y pre se deduce fácilmente

b) Relación entre el valor final y el actual

$\boxed{S_{\overline{n}\backslash i} = a_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{n}}$ F12 y también $\boxed{\ddot{S}_{\overline{n}\backslash i} = \ddot{a}_{\overline{n}\backslash i}(1+i)^{n}}$ F13

La relación entre el valor actual y el final se deduce fácilmente.

5.4. Renta constante, discreta, perpetua, pospagable o prepagable
Con el ánimo de esquematizar un poco la exposición se aborda en este epígrafe el estudio simultáneo de la renta perpetua pos y/o pre. En la gráfica siguiente aparecen simultáneamente, para que se aprecie en un golpe de vista, sus diferencias. Con la misma finalidad de ahorrar espacio se ha omitido poner el capital de la prestación que se sobreentiende implícito. Por tanto la gráfica de pos y pre es:



F nº 15 Valor actual pos y pre de una renta perpetua

Como se aprecia en la gráfica, la renta perpetua tiene origen pero no fin. El cálculo es un límite cuando el número de términos es infinito. Por tanto la fórmula será:

a) Valor actual pospagable.

$$a_{\overline{\infty}i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}\backslash i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-\left[\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]\Rightarrow 0}{i} = \frac{1}{i} \quad \text{luego} \quad \boxed{a_{\overline{\infty}\backslash i} = \frac{1}{i}} \quad \text{F14}$$

b) Valor actual prepagable.

Mirando a la gráfica se deduce fácilmente la siguiente fórmula:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = 1 + a_{\overline{\infty}\backslash i} = 1 + \frac{1}{i} = (1+i)\frac{1}{i}} \quad \text{F15} \quad \text{es decir} \quad \boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)a_{\overline{\infty}\backslash i}} \quad \text{F16}$$

Observar que en la F-16 aparece reflejada directamente la relación entre pre y pos vista en el epígrafe 5.3. Al mimo resultado se llega si se calcula el límite como se hizo para F-14

c) Valor actual de una renta diferida (VARD)

Conocido el valor de pos y pre sólo hay que anticiparlo por el tiempo de diferimiento. Se obtiene, de este modo las siguientes fórmulas:

$$\boxed{k/a_{\overline{\infty}\backslash i} = a_{\overline{\infty}\backslash i}(1+i)^{-k}} \quad \text{F17} \qquad \boxed{k/\ddot{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}\backslash i}(1+i)^{-k}} \quad \text{F18}$$

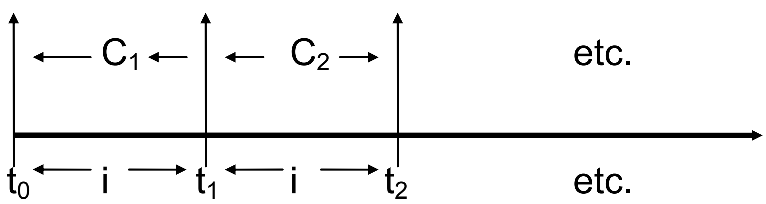
d) Valor final de las rentas perpetuas (VF).

Desde el punto de vista económico y financiero no tiene sentido aunque tenga solución el cálculo matemático. Comprobar que el límite tiende a infinito.

$$\boxed{S_{\overline{\infty}\backslash i} = \frac{(1+i)^{\infty}-1}{i} = \infty}$$

5.5. Renta constante, fraccionada, temporal

Existe una relación biunívoca entre el término de la renta y el subperíodo donde se engendra y vence. Por otro lado, en toda operación financiera, se opera con un tanto de interés que siempre está referido a una unidad de tiempo. En el tratamiento de las rentas puede ocurrir que la unidad de tiempo a la que se refiere el tanto coincida o no con la unidad de tiempo a la que se refiere el término de la renta.

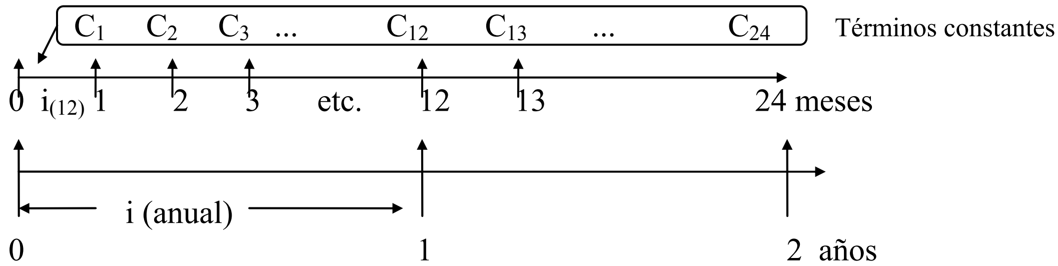


Fnº 16 Correspondencia entre término de la renta y tanto de interés

En la gráfica se observa que el término de la renta C_1 y el tanto de interés "i" están referidos a la misma unidad de tiempo y, de no ser así, se proporcionan dos tipos de soluciones.

1) Adecuar el tanto de interés al tiempo que comprende el término de la renta mediante la ecuación de tantos equivalentes. Este es el camino más corto, sencillo y ampliamente utilizado por el mundo empresarial.

Por simplificar, se expone el ejemplo de una renta constante y pospagable



Fnº 17: Renta fraccionada y correspondencia de interés equivalente

La solución es de lo más simple aplicando los conocimientos adquiridos hasta el momento. Es suficiente con aplicar directamente $i_{(m)}$:

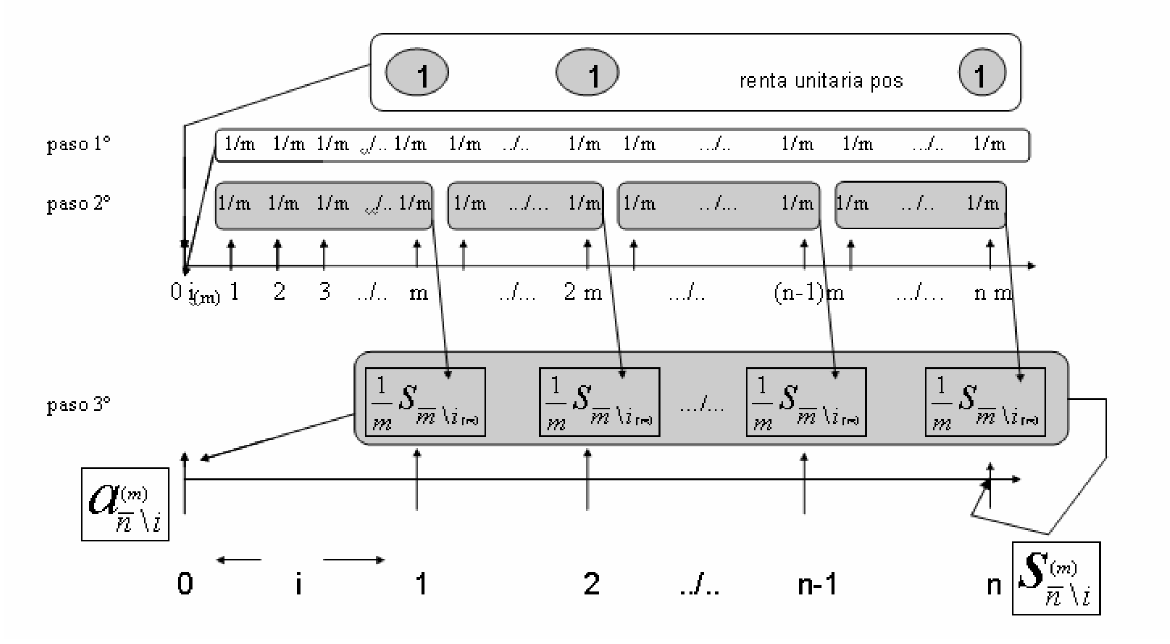
$$V_0 = C a_{\overline{m \cdot n}\backslash i_{(m)}} = C \frac{1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-(m \cdot n)}}{i_{(m)}}$$

Siendo $\boxed{i_{(m)} = \frac{J_{(m)}}{m}}$ o $\boxed{i_{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}$ para valorese de n=2 y m=12

2) Adecuar el término de la renta al tiempo que comprende el tanto de interés. En los siguientes apartados se aborda esta segunda solución, pues abre caminos interesantes para posteriores planteamientos de rentas

a) Valor actual y final de la renta unitaria, constante, fraccionada, temporal y pos:	$a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i}$	$S^{(m)}_{\overline{n}\backslash i}$

La gráfica representa tres pasos:



Representación gráfica de renta fraccionada pos

El razonamiento gráfico en tres pasos proporciona la fórmula del valor actual de una renta fraccionada, constante y temporal.

El primer paso es meramente ilustrativo: el capital anual C = 1 se fracciona en eme parte (1/m). El valor actual se podría calcular, sin mayor dificultad, utilizando el tanto equivalente $i_{(m)}$.

El segundo paso es una descomposición en subrentas de la renta anterior sobre las que se calcula el valor final.

$$\boxed{\frac{1}{m} s_{\overline{m}\backslash i_{(m)}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{\left(1+i_{(m)}\right)^{m}-1}{i_{(m)}} = \frac{i}{J_{(m)}}} \quad \text{F19}$$

Que es el coeficiente de fraccionamiento

El tercer paso supone actualizar el valor final de las subrentas del apartado anterior.

$$\boxed{a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1}{m} s_{\overline{m}\backslash i_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1}{m}\left[\frac{\overbrace{\left(1+i_{(m)}\right)^{m}-1}^{i}}{i_{(m)}}\right] a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1}{m}\frac{i}{i_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i} = 1\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i} = \underbrace{\left[\frac{1}{m}m\right]}_{\text{Cuota anual}}\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i}}$$

Si se denomina a 1/m = C_f *cantidad fraccionada.* La fórmula anterior queda:

$$\boxed{\begin{gathered} a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = C_f \bullet m\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i} = mC_f\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i} \\ Si \quad C_f \bullet m = 1 \\ a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = \frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i} \end{gathered}} \quad \text{F 20}$$

b) Valor final de la renta constante, fraccionada y temporal: VF = $\boxed{s^{(m)}_{\overline{n}\backslash i}}$

Si se ha seguido con atención el proceso anterior fácilmente se deduce que

$$\boxed{s^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = \underbrace{mC_f}_{1}\frac{i}{J_{(m)}}\cdot s_{\overline{n}\backslash i} = \frac{i}{J_{(m)}}\cdot s_{\overline{n}\backslash i}} \quad \text{F 21}$$

c) Valor actual y final de la renta unitaria, constante, fraccionada, temporal y prepagable	$\boxed{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i}}$	$\boxed{\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i}}$

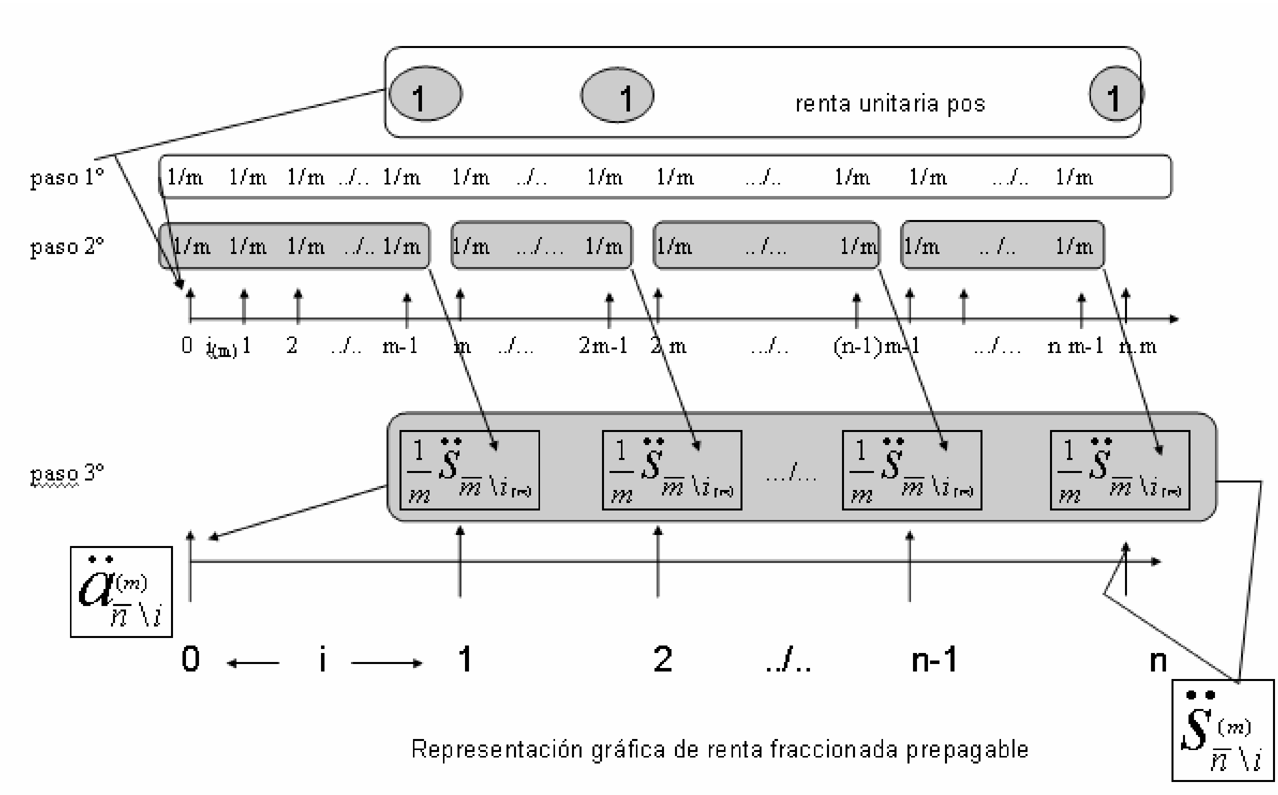
El desarrollo de la fórmula es como sigue (fijarse en la gráfica que viene a continuación):

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1}{m}\left(\ddot{s}_{\overline{m}\backslash i_{(m)}}\right)a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1}{m}\overbrace{\left(1+i_{(m)}\right)}^{(1+i)^{\frac{1}{m}}}s_{\overline{m}\backslash i_{(m)}}a_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} mCf\frac{i}{J_{(m)}}a_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}}a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} \quad \text{F22}$$

siendo $\boxed{\left(1+i_{(m)}\right)=(1+i)^{\frac{1}{m}}}$ y también $\boxed{i=\left(1+i_{(m)}\right)^m-1}$ según los tantos equivalentes

Se puede observar que el factor que permite pasar de pos a pre es: $\boxed{(1+i)^{\frac{1}{m}}}$

La gráfica representa tres pasos:



Representación gráfica de renta fraccionada prepagable

El valor actual se visto anteriormente y para el valor final se tiene:

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} mC_f\frac{i}{J_{(m)}}s_{\overline{n}\backslash i} = C(1+i)^{\frac{1}{m}}s^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} \quad \text{F23}$$

(la demostración es tan sencilla que se omite)

d) Valor actual de la renta constante, fraccionada, perpetua, pos y pre:

La fórmula pos es: $\boxed{a^{(m)}_{\overline{\infty}\backslash i} = mC_f\frac{i}{J_{(m)}}a_{\overline{\infty}\backslash i} = mC_f\frac{1}{J_{(m)}}}$ F24

La fórmula pre es: $\boxed{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty} i} = \left(\ddot{s}_{\overline{m}\backslash i_{(m)}}\right)a_{\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}}a^{(m)}_{\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} mC_f\frac{1}{J_{(m)}}}$ F25

(en ambos casos la demostración se omite por su sencillez)

e) Valor de la renta constante, fraccionada, diferida y anticipada

Para la renta diferida. Conocido el valor actual de la renta fraccionada se traslada financieramente al momento inicial de la operación financiera.

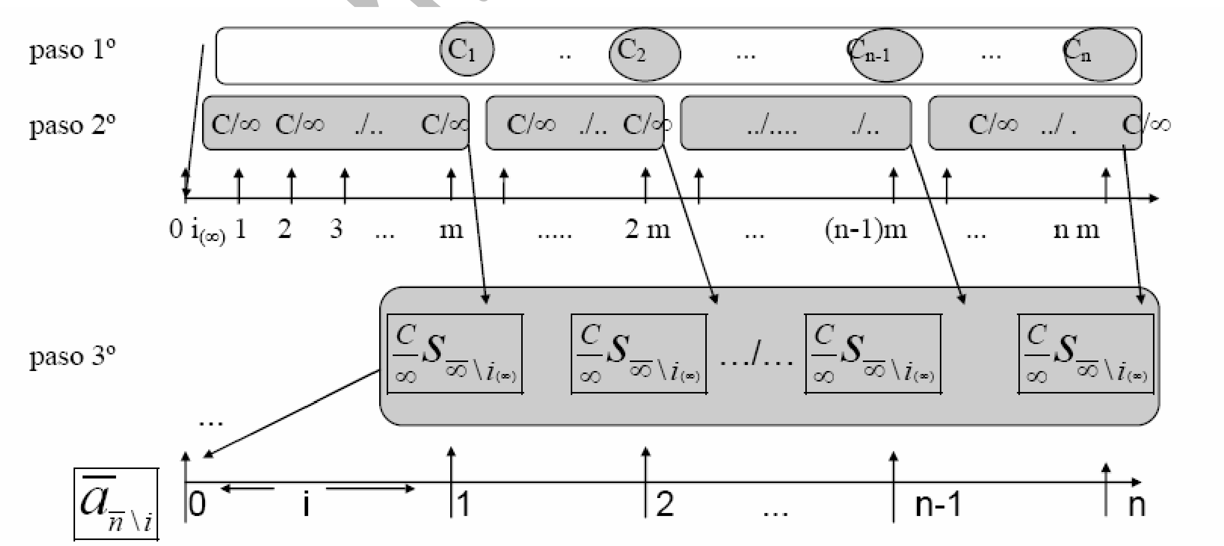
Para el caso de la renta anticipada. Conocido el valor final de la renta fraccionada se traslada financieramente al momento de finalización de la operación financiera.
Se ha de tener en cuenta que los momentos de inicio y fin de la operación financiera coinciden respectivamente con los del contrato financiero entre acreedor y deudor que pueden coincidir o no con los de la renta (en el caso de las rentas inmediatas sí coincide)

5.6. Renta constante, continua y temporal

Se denomina continua porque el término de la renta y el correspondiente subintervalo se fracciona en infinitas partes. Es decir, capitales infinitésimos están biunívocamente asociados a intervalos infinitésimos. En la vida diaria financiera pueden aparecen ejemplos de capitalización, rentas, etc. con frecuencia diaria. Pero imposible encontrarlos con un período de tiempo inferior (por lo tanto podemos decir que en la vida del día a día existen rentas cuasicontinuas). Técnicamente es una renta que utiliza una frecuencia de fraccionamiento infinita. Al ser así, la diferencia entre el vencimiento pos y pre es un infinitésimo, viniendo a ser lo mismo: pos = pre

a) Valor actual de la renta constante, fraccionada, temporal: $\boxed{\bar{a}_{\overline{n}\backslash i}}$

La gráfica representa tres pasos:



Fnº 19: Representación gráfica de renta continua

El razonamiento gráfico en tres pasos proporciona la fórmula del valor actual de la renta continua, constante y temporal.

El tercer paso supone actualizar el valor final de las subrentas del apartado anterior.

$$C\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} = \lim_{m\to\infty}\frac{C}{m}a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = \lim_{m\to\infty}\frac{C}{m}s_{\overline{m}\backslash i_{(m)}}\bullet a_{\overline{n}\backslash i} = \lim_{m\to\infty}\frac{C}{m}\left[\frac{\overbrace{\left(1+i_{(m)}\right)^m-1}^{i}}{i_{(m)}}\right]\bullet a_{\overline{n}\backslash i} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}C\frac{i}{J_{(m)}}\bullet a_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{\lim\limits_{m\to\infty}J_{(m)}}\bullet a_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{L(1+i)}a_{\overline{n}\backslash i} \quad \text{F26}$$

teniendo en cuenta que:

* según la equivalencia financiera $\boxed{i=\left(1+i_{(m)}\right)^m-1}$
* El límite de $J_{(m)}$:

$$\lim_{m\to\infty}J_{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]m = 0\bullet\infty = \lim_{m\to\infty}\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{\frac{1}{m}} = \frac{0}{0} =$$
$$\text{Aplicando L´Hópital} \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}L(1+i)\left(-\frac{1}{m^2}\right)}{-\frac{1}{m^2}} = L(1+i) = \rho$$

Luego el valor actual de una renta continua para un capital anual de C unidades monetarias (anuales) es: $\boxed{C\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{L(1+i)}a_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{\rho}a_{\overline{n}\backslash i}}$ F27

A los mismos resultados se llega si se tiene en cuenta que:

* C(t) = C/∞
* $(1+i)^{-t}$ = ley de actualización
* $t=\Delta t$ siendo $\lim\limits_{h\to 0}=\frac{(t+h)-t}{h}=\Delta t$

$$C\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} = \int_0^n (1+i)^{-t}C(t)dt = C\left[\frac{-(1+i)^{-t}}{L(1+i)}\right]_0^n = C\left[\frac{-1}{(1+i)^n L(1+i)} - \frac{-1}{L(1+i)}\right] =$$
$$C\frac{1}{L(1+i)}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right] = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{L(1+i)}\bullet\frac{i}{i} = C\frac{i}{L(1+i)}\bullet\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C\frac{i}{\rho}a_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{\rho}a_{\overline{n}\backslash i}$$

En el caso de ser una renta perpetua, la fórmula anterior queda como:

$$\boxed{C\overline{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = C\frac{i}{\rho}a_{\overline{\infty}\backslash i} = C\frac{i}{\rho}\bullet\frac{1}{i} = C\frac{1}{\rho}} \quad \text{F28}$$

Si se ha seguido con atención el proceso anterior fácilmente se deduce que el valor final es: $\boxed{C\overline{S}_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{\rho}S_{\overline{n}\backslash i}}$ F 29

El lector debe saber obtener por sí solo el valor de las rentas anteriores cuando son diferidas o anticipadas (sólo tiene que aplicar a las rentas anteriores el factor de diferimiento $(1+i)^{-k}$ y de anticipación $(1+i)^{h}$).

5.7. Renta variable en progresión geométrica

En este caso los términos de la renta componen una progresión geométrica, de tal manera que: $C_1 = C$; $C_2 = Cq$; $C_3 = Cq^2$; ... ; $C_n = Cq^{n-1}$ siendo la razón q >0 para que los capitales sean positivos o deudores

a) Valor actual y final en pos y pre:

La secuencia operativa del valor actual es como sigue:

$$A_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^2(1+i)^{-3} + ... + Cq^{n-1}(1+i)^{-n} =$$
$$= C\left[(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + q^2(1+i)^{-3} + ... + q^{n-1}(1+i)^{-n}\right] = C\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{1+i-q}$$

cuya fórmula es

Pos $\boxed{A_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{1+i-q}}$ F30 y pre $\boxed{\ddot{A}_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}}$ F31

Casos particulares:

* q = 1 ⇒ $\boxed{A_{(C,q=1)\overline{n}\backslash i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}1^n}{1+i-1} = Ca_{\overline{n}\backslash i}}$

* q = 1+i ⇒

$$A_{(C,q=1+i)\overline{n}\backslash i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{1+i-q} = \frac{0}{0} = C\lim_{q\to 1+i}\frac{-(1+i)^{-n}n\cdot q^{(n-1)}}{-1} = C\cdot n(1+i)^{-1}$$

Si se desea hallar el **valor final** basta con capitalizar hasta el momento enésimo el valor actual:

Pos $\boxed{S_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)^n A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}}$ F32 y pre $\boxed{\ddot{S}_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)S_{(C,q)\overline{n}\backslash i}}$ F33

b) Valor actual en pos y pre de la renta perpetua:

En pos $\boxed{A_{(C,q)\overline{\infty}\backslash i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{1+i-q} = C\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}}$ donde:

si q = 1 ⇒ $\boxed{A_{(C,q=1)\overline{\infty}\backslash i} = Ca_{\overline{\infty}\backslash i} = C\frac{1}{i}}$ (la renta deja de ser en progresión geométrica)

* q = 1+i $\Rightarrow$ $$\boxed{A_{(C,\,q\,=\,1+i)\overline{\infty}\,\backslash\, i}=C\cdot n(1+i)^{-1}=\frac{C\cdot\infty}{1+i}=\infty}$$

* q > 1+i $\Rightarrow$ $$\boxed{A_{(C,\,q\,>\,1+i)\overline{\infty}\,\backslash\, i}=C\frac{1-(1+i)^{-n}q^{n}}{1+i-q}=C\frac{1-\left(\dfrac{q}{1+i}\right)^{n}}{1+i-q}=\frac{-\infty}{-}=\infty}$$

* 0< q < 1+i $\Rightarrow$ $$\boxed{A_{(C,\,q\,<\,1+i)\overline{\infty}\,\backslash\, i}=C\frac{1-\left(\dfrac{q}{1+i}\right)^{n}\Rightarrow 0}{1+i-q}=C\frac{1}{1+i-q}}$$ F 34 Desde el punto de vista financiero y económico es la **única que tiene sentido**

En el caso de ser una renta prepagable la fórmula sería:

$$\boxed{\ddot{A}_{(C,\,q\,<\,1+i)\overline{\infty}\,\backslash\, i}=(1+i)C\frac{1-\left(\dfrac{q}{1+i}\right)^{n}\Rightarrow 0}{1+i-q}=C\frac{(1+i)}{1+i-q}}$$

5.8. Renta variable en progresión aritmética

Para encontrar la fórmula se puede descomponer en las siguientes sub-rrentas presentando la siguiente estructura gráfica:

		C	C+d	C+2d	C+3d	C+(n-2)d	C+(n-1)d
$\boxed{A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}}$ =	0	1	2	3	4	n-1	n
	a efectos pedagógicos se descompone la renta anterior en las subrentas que siguen:						
$C a_{\overline{n}\backslash i}$ +		C	C	C	C	C	C
+ $d a_{\overline{(n-1)}\backslash i}(1+i)^{-1}$			d	d	d	d	d
+ $d a_{\overline{(n-2)}\backslash i}(1+i)^{-2}$				d	d	d	d
+ $d a_{\overline{(n-3)}\backslash i}(1+i)^{-3}$					d	d	d
+ $d a_{\overline{(2)}\backslash i}(1+i)^{-(n-2)}$						d	d
+ $d a_{\overline{(1)}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}$							d
	0	1	2	3	4	n-1	n

TOTAL= $\boxed{A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}}$ $$\Rightarrow A_{(C,d)\overline{n}\,\backslash\, i}=C a_{\overline{n}\backslash i}+d a_{\overline{(n-1)}\backslash i}(1+i)^{-1}+\ldots+d a_{\overline{2}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}+d a_{\overline{1}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}$$

Fnº 20: Representación gráfica de la renta variable en progresión aritmética

Operando se tiene:

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}=Ca_{\overline{n}\backslash i}+da_{\overline{(n-1)}\backslash i}(1+i)^{-1}+\ldots+da_{\overline{2}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}+da_{\overline{1}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+d\left[a_{\overline{(n-1)}\backslash i}(1+i)^{-1}+\ldots+a_{\overline{2}\backslash i}(1+i)^{-(n-2)}+a_{\overline{1}\backslash i}(1+i)^{-(n-1)}\right]=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}\left\{\left[1-(1+i)^{-(n-1)}\right](1+i)^{-1}+\ldots+\left[1-(1+i)^{-2}\right](1+i)^{-(n-2)}+\left[1-(1+i)^{-1}\right](1+i)^{-(n-1)}\right\}=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}\left\{\left[(1+i)^{-1}-(1+i)^{-n}\right]+\ldots+\left[(1+i)^{-(n-2)}-(1+i)^{-n}\right]+\left[(1+i)^{-(n-1)}-(1+i)^{-n}\right]+(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n}\right\}=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}\left\{\underbrace{\left[\left[(1+i)^{-1}+\ldots+(1+i)^{-(n-2)}+(1+i)^{-(n-1)}\right]+(1+i)^{-n}\right]}_{a_{\overline{n}\backslash i}}-\underbrace{\left[\left[(1+i)^{-n}+\ldots+(1+i)^{-n}+(1+i)^{-n}\right]+(1+i)^{-n}\right]}_{n(1+i)^{-n}}\right\}=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}\left\{\left[a_{\overline{n}\backslash i}\right]-\left[n(1+i)^{-n}\right]\right\}=\underbrace{Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}a_{\overline{n}\backslash i}-\frac{d}{i}n(1+i)^{-n}}_{\left(C+\frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}\backslash i}-dn\frac{(1+i)^{-n}}{i}\Rightarrow OjO}+\frac{d}{i}n-\frac{d}{i}n=$$

$$=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}a_{\overline{n}\backslash i}+dn\left(\frac{-1}{i}(1+i)^{-n}+\frac{1}{i}-\frac{1}{i}\right)=Ca_{\overline{n}\backslash i}+\frac{d}{i}a_{\overline{n}\backslash i}+dn\left(\underbrace{\frac{-(1+i)^{-n}+1}{i}}_{a_{\overline{n}\backslash i}}-\frac{1}{i}\right)=$$

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}=\left(C+\frac{d}{i}+dn\right)a_{\overline{n}\backslash i}-\frac{dn}{i}$$

El total es igual a la suma de la renta constante de cuantía “C” y las constantes y diferidas de cuantía “d” (razón de la progresión aritmética)
En el desarrollo matemático es importante observar que en la 5º línea de ecuación se suma, al final del primer corchete, la expresión $(1+i)^n$ y luego se resta al finalizar el segundo corchete.

Por tanto el valor actual y final será:

$$\boxed{A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}=\left(C+\frac{d}{i}+dn\right)a_{\overline{n}\backslash i}-\frac{dn}{i}}\ \text{F 35}\qquad \boxed{S_{(C,d)\overline{n}\backslash i}=A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}(1+i)^{n}}\ \text{F 36}$$

Al mismo resultado se llega si utilizamos el siguiente cambio de variable:

$$\boxed{v=(1+i)^{-1}}$$

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = C a_{\overline{n}\backslash i} + d\left[1/a_{\overline{(n-1)}\backslash i} + 2/a_{\overline{n-2}\backslash i} + \ldots + (n-1)/a_{\overline{1}\backslash i}\right] =$$

$$= C a_{\overline{n}\backslash i} + d\left[v a_{\overline{(n-1)}\backslash i} + v^2 a_{\overline{(n-1)}\backslash i} + \ldots + v^{(n-1)} a_{\overline{1}\backslash i}\right] =$$

$$= C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i}\left\{ v\left[1-\underbrace{v^{(n-1)}}_{1^o}\right] + v^2\left[1-\underbrace{v^{(n-2)}}_{2^o}\right]+\ldots+v^{(n-1)}\left[1-\underbrace{v^1}_{(n-1)^o}\right]\right\} =$$

$$= C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i}\left\{\left[v-\underbrace{v^n}_{1^o}\right]+\left[v^2-\underbrace{v^n}_{2^o}\right]+\ldots+\left[v^{(n-1)}-\underbrace{v^n}_{(n-1)^o}\right]+\left[v^n-\underbrace{v^n}_{n^o}\right]\right\}$$

$$= C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i}\left\{\underbrace{v^1+v^2+\ldots+v^{n-1}+v^n}_{a_{\overline{n}\backslash i}} - n\left(v^n\right)\right\} =$$

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = \left[C+\frac{d}{i}\right] a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n\left(v^n\right)$$

La fórmula anterior es importante porque me permite proyectarme a otras dos:

a) Renta variable en progresión aritmética:

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i}\left\{\underbrace{v^1+v^2+\ldots+v^{n-1}+v^4}_{a_{\overline{n}\backslash i}} - n\left(v^n\right)\right\} + n\frac{d}{i} - n\frac{d}{i} =$$

$$= C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i} a_{\overline{n}\backslash i} \underbrace{-\frac{d}{i} n\left(v^n\right) + n\frac{d}{i}}_{nd\left(\frac{1-v^n}{i}\right) = nd\, a_{\overline{n}\backslash i}} - n\frac{d}{i} = C a_{\overline{n}\backslash i} + \frac{d}{i} a_{\overline{n}\backslash i} + nd\, a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n =$$

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = \left[C+\frac{d}{i}+nd\right] a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n$$

b) Renta variable en progresión aritmética perpetua

El valor en pos será el límite cuando n ⇒ 8:

$$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = \left[C+\frac{d}{i}\right] a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n\left(v^n\right)$$

$$A_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[C+\frac{d}{i}\right] a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n\left(v^n\right)\right\} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left(C+\frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{d}{i} n(1+i)^{-n}\right\} =$$

$$= \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} - \lim_{n\to\infty}\frac{d}{i} n(1+i)^{-n} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} - \frac{d}{i}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} - \frac{d}{i}(0)$$

Siendo: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n} = \frac{\infty}{\infty}$ y aplicando L´Hopital queda: $\underbrace{\frac{1}{(1+i)^n L(1+i)^n}}_{\frac{1}{\infty}\Rightarrow 0}$

Luego la solución final es: $A_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$

$$\boxed{A_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i}=\left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}}$$ F 37

5.9 Renta fraccionada, variable en progresión geométrica/aritmética

En el caso de que los intervalos sean anuales y los subintervalos mensuales la pregunta clave podría ser: ¿la cuantía fraccionada mensual permanece constante a lo largo del año o se incrementa en progresión geométrica/aritmética?. Si permanece constante (C/m) para el primer intervalo, (Cq/m) para el segundo, etc. al finalizar el intervalo se tendría:

a) Geométrica

$A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}$ Sin Fraccionar

	C	Cq	Cq^2	Cq^3	....	$Cq^{(n-2)}$	$Cq^{(n-1)}$
0	1	2	3	4		n-1	n

Si la renta es fraccionada se aplica lo que el Profesor Lorenzo Gil Pelaez denomina "operador de transformación de la renta sin fraccionar en la correspondiente fraccionada": $\boxed{\frac{1}{m}S_{\overline{m}\backslash i\,(m)}=\frac{i}{J_{(m)}}}$

Por tanto El valor actual y final de la renta fraccionada en progresión geométrica es: $\boxed{A^{(m)}_{(C,q)\overline{n}\backslash i}=\frac{i}{J_{(m)}}A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}}$ F38 V.A. y $\boxed{S^{(m)}_{(C,q)\overline{n}\backslash i}=A^{(m)}_{(C,q)\overline{n}\backslash i}(1+i)^n}$ F39 V.F.

En el caso de la renta en progresión aritmética será:

b) Aritmética

$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}$ Sin Fraccionar

	C	C+d	C+2d	C+3d	....	C+(n-2)d	C+(n-1)d
0	1	2	3	4		n-1	n

pues (C/m) al finalizar el año se transforma en C= (C/m).m

$\boxed{A^{(m)}_{(C,d)\overline{n}\backslash i}=\frac{i}{J_{(m)}}A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}}$ F40 V.A. y $\boxed{S^{(m)}_{(C,d)ni}=A^{(m)}_{(C,d)ni}(1+i)^n}$ F41 V.F.

5.10 Rentas continuas y variables en progresión geométrica /aritmética.

a) Continua y variable en progresión geométrica

En la progresión geométrica será : $\boxed{\overline{A}_{(c,q)\overline{n}\backslash i}=\frac{i}{L(1+i)}C\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}q^{t-1}}$

El profesor Gil Peláez dice que esta renta tiene *densidad exponencial*[3]. El primer intervalo de tiempo se actualiza con el infinitésimo C/∞ y en los sucesivos con (Cq^t/∞), por eso a los efectos de integración, se considera una función de densidad $C(t) = Cq^t d(t)$ para todo instante de tiempo. Después de integrar la fórmula que se obtiene es:

$$\boxed{\overline{A}_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = C\frac{1-\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n}}{L(1+i)-Lq}}$$

F42 Cuya demostración es:

$$\overline{A}_{(c,q)\overline{n}\backslash i} = \int_0^n (1+i)^{-t} C_{(t)} d_{(t)} = \int_0^n (1+i)^{-t} C q^t d_{(t)} = C\int_0^n \left(\frac{1+i}{q}\right)^{-t} d_{(t)} =$$

$$= C\left[\frac{-\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-t}}{L\left(\frac{1+i}{q}\right)}\right]_0^n = C\left[\frac{-\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n}}{L\left(\frac{1+i}{q}\right)} - \frac{-\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-0}}{L\left(\frac{1+i}{q}\right)}\right] = C\frac{1-\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n}}{L(1+i)-Lq}$$

Nota: se ha aplicado la integral inmediata $\int a^x d_{(x)} = \frac{a^x}{La} + C$ y $\int a^{-x} d_{(x)} = \frac{-a^{-x}}{La} + C$

b) Continua y variable en progresión aritmética

El profesor Gil Peláez dice que esta renta tiene *densidad lineal*[4]. El primer intervalo de tiempo se actualiza con el infinitésimo C/∞ y en los sucesivos con $\boxed{(C+(t-1)r)/\infty}$, siendo "r" la razón de la progresión, por eso a los efectos de integración, se considera una función de densidad $C(t) = (C+rt)d(t)$ para todo instante de tiempo. En la progresión aritmética sería:

$$\overline{A}_{(C,r)\overline{n}\backslash i} = \frac{i}{L(1+i)}\sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}\left(C+(t-1)r\right) = \int_0^n (1+i)^{-t} C_{(t)} d_{(t)} = \int_0^n (1+i)^{-t}\left[C+(t-1)r\right] d_{(t)} =$$

$$= C\int_0^n (1+i)^{-t} d_{(t)} + r\int_0^n t(1+i)^{-t} d_{(t)} = \left(C+\frac{r}{L(1+i)}+rn\right)\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} - \frac{rn}{L(1+i)}$$

$$\boxed{\overline{A}_{(C,r)\overline{n}\backslash i} = \left(C+\frac{r}{L(1+i)}+rn\right)\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} - \frac{rn}{L(1+i)}}$$

F43

5.11 otro tipo de rentas

Cualquier otro tipo de rentas se aborda con los conocimientos adquiridos y se pueden presentar varios casos:

[3]Matemáticas financieras. Ed. Rodagraf SA Madrid 1982 (Página 327)

[4]Matemáticas financieras. Ed. Rodagraf SA Madrid 1982 (Página 325)

a) Que el tanto de interés se corresponda a una unidad de tiempo inferior a la del término de la renta. Entonces se recurre a los tantos equivalentes.
b) Que los términos de la renta varíen según una ley desconocida y por tanto no se puede sacar factor común. Entonces la solución aparece tomando cada término de forma individualizada y sumar sus valores actualizados o capitalizados según proceda.
c) Que el tanto de interés varíe. Según proceda la renta se puede descomponer en subrentas.

6.- CONCLUSIONES

El estudio de las rentas establece las bases para poder abordar problemas de:
a) Préstamos y empréstitos
b) Inversiones y los procesos de optimización VAN, TIR, etc.

Fórmulas más comunes en rentas: Ver Anexos I y II

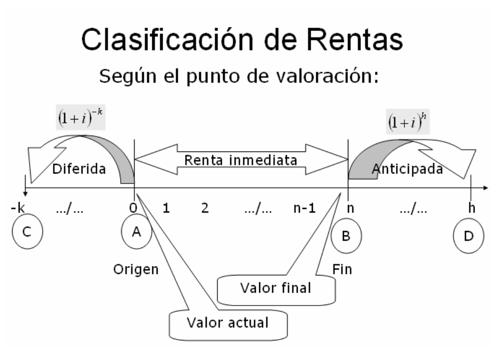
7.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y DOCUMENTALES

- Matemáticas financieras. *Autor: Gabriel Rodríguez Martínez. Ed. Editex. Madrid 1994. Es un libro especialmente editado para Formación Profesional.*

- Matemáticas de las operaciones financieras. *Autor: Lorenzo Gil Peláez. De. Rodagraf,S.A. Madrid 1982*

- Análisis de las operaciones financieras bancarias y bursátiles. *Autor: Vicente T. González Catalá. De. Ediciones de las ciencias sociales, S.A. Madrid 1992*

FÓRMULAS FINANCIERAS (I)

RENTAS			Pos	Pre
Término Constante	**Inmediata**	**V. Actual**	$a_{\overline{n}\backslash i} = \frac{1-(1+1)^{-n}}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)a_{\overline{n}\backslash i}$
		V. Final	$s_{\overline{n}\backslash i} = \frac{(1+1)^{n}-1}{i}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\backslash i} = (1+i)s_{\overline{n}\backslash i}$
	Perpetua	**V. Actual**	$a_{\overline{\infty}\backslash i} = \frac{1}{i}$	variable $\ddot{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)a_{\overline{\infty}\backslash i}$
variable	**Progresión aritmética** – **Inmediata**	**V. actual**	$A_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = \left(C+\frac{d}{i}+dn\right)a_{\overline{n}\backslash i} - \frac{dn}{i}$	$\ddot{A}_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = (1+i)A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}$
	Progresión aritmética – **Inmediata**	**V. Final**	$S_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = A_{(C,d)\overline{n}\backslash i}(1+i)^{n}$	$\ddot{S}_{(C,d)\overline{n}\backslash i} = (1+i)S_{(C,d)\overline{n}\backslash i}$
	Progresión aritmética – **Perpetua**	**V. actual**	$A_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$	$\ddot{A}_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)A_{(C,d)\overline{\infty}\backslash i}$
	Progresión geométrica – **Inmediata**	**V. Actual** $\boxed{q \neq (1+i)}$	$A_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}q^{n}}{1+i-q}$	$\ddot{A}_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}$
	Progresión geométrica – **Inmediata**	**V. Actual** $\boxed{q = (1+i)}$	$A_{(C,q=1+i)\overline{n}\backslash i} = C\cdot n\cdot(1+i)^{-1}$	$\ddot{A}_{(C,q=1+i)\overline{n}\backslash i} = C\cdot n$
	Progresión geométrica – **Inmediata**	**V. final** $\boxed{q \neq (1+i)}$	$S_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{n}A_{(C,q)\overline{n}\backslash i}$	$\ddot{S}_{(C,q)\overline{n}\backslash i} = (1+i)S_{(C,q)\overline{n}\backslash i}$
	Progresión geométrica – **Inmediata**	**V. final** $\boxed{q = (1+i)}$	$S_{(C,q=1+i)\overline{n}\backslash i} = C\cdot n\cdot(1+i)^{n-1}$	$\ddot{S}_{(C,q=1+i)\overline{n}\backslash i} = C\cdot n\cdot(1+i)^{n}$
	Progresión geométrica – **Perpetua**	**V. Actual** $\boxed{q = 1}$	$A_{(C,q=1)\overline{\infty}\backslash i} = a_{\overline{\infty}\backslash i}$	$\ddot{A}_{(C,q=1)\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)a_{\overline{\infty}\backslash i}$
	Progresión geométrica – **Perpetua**	**V. Actual** $\boxed{q = (1+i)}$	$A_{(C,q=1+i)\overline{\infty}\backslash i} = \infty$	
	Progresión geométrica – **Perpetua**	**V. Actual** $\boxed{q > (1+i)}$	$A_{(C,q>1+i)\overline{\infty}\backslash i} = \infty$	
	Progresión geométrica – **Perpetua**	**V. Actual** $\boxed{q < (1+i)}$	$A_{(C,q<1+i)\overline{\infty}\backslash i} = \frac{C}{1+i-q}$	

FÓRMULAS FINANCIERAS (II)

RENTAS CONSTANTES FRACCIONADAS Y CONTÍNUAS

RENTAS			V. Actual	V. Final
FRACCIONADAS	Inmediata	Pos	$a^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$	$S^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{i}{J_{(m)}} S_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$
		Pre	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{i}{J_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} a_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$	$\ddot{S}^{(m)}_{\overline{n}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{i}{J_{(m)}}(1+i)^{\frac{1}{m}} S_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$
	Perpetua	Pos	$a^{(m)}_{\overline{\infty}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{\infty}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{1}{J_{(m)}}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$	
		Pre	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}\backslash i} = (a\cdot m)(1+i)^{\frac{1}{m}}\frac{i}{J_{(m)}} a_{\overline{\infty}\backslash i} = (a\cdot m)\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}}{J_{(m)}}$ Siendo C la cuota anual: $C = a\cdot m$	
CONTINUAS	Inmediata	V. Actual Pos y Pre	$\overline{a}_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{L(1+i)} a_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual	**V. Final Pos y pre** $\overline{S}_{\overline{n}\backslash i} = C\frac{i}{L(1+i)} S_{\overline{n}\backslash i}$ Siendo C la cuota anual
	Perpetua	V. Actual Pos y pre	$\overline{a}_{\overline{\infty}\backslash i} = C\frac{i}{L(1+i)} a_{\overline{\infty}\backslash i} = \frac{C}{L(1+i)}$ Siendo C la cuota anual	

RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA FRACCIONADAS Y CONTÍNUAS (Siendo C = a. m)

RENTAS			V. Actual	V. Final
FRACCIONADA	Inmediata	pos	$A^{(m)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = \frac{i}{J_{(m)}} A_{(c,d)\overline{n}\backslash i}$	$S^{(m)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{n}\frac{i}{J_{(m)}} A_{(c,d)\overline{n}\backslash i}$
		Pre	$\ddot{A}^{(m)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}}\frac{i}{J_{(m)}} A^{(m)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i}$	$\ddot{S}^{(m)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = (1+i)^{n}\frac{i}{J_{(m)}} \ddot{A}_{(c,d)\overline{n}\backslash i}$
	Perpetua	Pos	$A^{(m)}_{(c,d)\overline{\infty}\backslash i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{J_{(m)}}$	
		Pre	$\ddot{A}^{(m)}_{(c,d)\overline{\infty}\backslash i} = (1+i)^{\frac{1}{m}}\left(c+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{J_{(m)}}$	
CONTINUAS	Inmediata	Pos Y pre	$\overline{A}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = A^{(\infty)}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = \lim_{m\to\infty}\frac{i}{J_{(m)}} A_{(c,d)\overline{n}\backslash i} \Rightarrow \overline{A}_{(c,d)\overline{n}\backslash i} = \frac{i}{L(1+i)} A_{(c,d)\overline{n}\backslash i}$	
	Perpetua	Pos Y pre	$\overline{A}_{(c,d)\overline{\infty}\backslash i} = \left(c+\frac{d}{i}\right)\frac{1}{L(1+i)}$	

NOTAS

Email: informacion@preparadoresdeoposiciones.com • Web: http://www.preparadoresdeoposiciones.com