**TEMA 38**: *Tangencias y enlaces. Aplicaciones.*

## Esquema:



## 1.- INTRODUCCIÓN.

En este tema aprenderemos a resolver los distintos casos de tangencias entre rectas y circunferencias y entre circunferencias que se pueden plantear. Los casos de tangencias son limitados y admiten resoluciones por distintos métodos, el método a elegir irá condicionado muchas veces en función de la disposición de los datos, muchos de los casos de tangencias se simplifican reduciéndolos a un caso más sencillo.



Email: preparadores@arrakis.es • Web: http://www.preparadoresdeoposiciones.com

Las tangencias tienen una gran aplicación en el mundo del diseño industrial, el arte, la arquitectura, la ingeniería y las obras públicas.

## 2.- TRAZADOS DE RECTAS TANGENTES.

### 2.1.- Posiciones relativas entre recta y circunferencia.

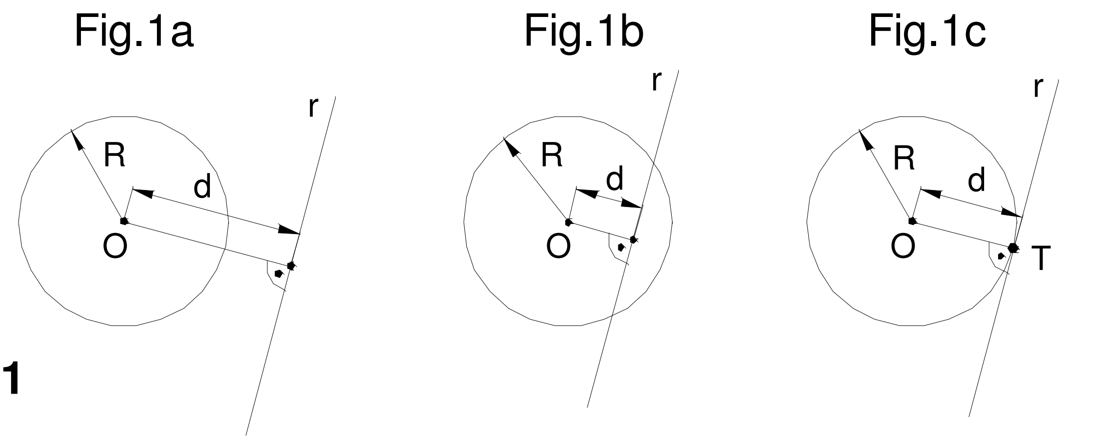



**Fig.1**

d > R — RECTA EXTERIOR

d < R — RECTA SECANTE

d = R — RECTA TANGENTI

Si la mínima distancia "d" desde el centro de la circunferencia a la recta "r" es mayor que el radio se dice que la recta es exterior (Fig.1a), si es menor que el radio la recta es secante (Fig.1b) y si es igual al radio la recta es tangente, al punto de contacto se le llama punto de tangencia "T" (Fig.1c).

### 2.2.- Rectas tangentes a una circunferencia.

### 2.2.a.- Por un punto de la circunferencia.

Dada una circunferencia y un punto P contenido en ella para dibujar la recta tangente se une el punto P con el centro y se dibuja una perpendicular al radio obtenido por el punto P (Fig.2a).

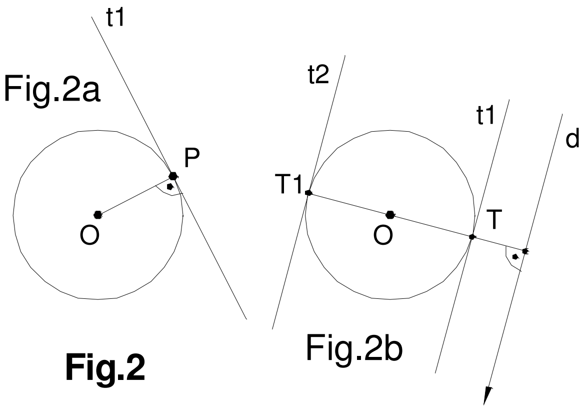



**Fig.2**

### 2.2.b.- Paralelas a una dirección dada.

Dada una circunferencia y una dirección "d" para dibujar las tangentes paralelas a dicha dirección se traza en primer lugar una perpendicular desde el centro de la circunferencia a la dirección, dicha perpendicular corta a la circunferencia en dos puntos “T” y “T1”, las paralelas a la dirección por dichos puntos serán las soluciones (Fig.2b).

### 2.2.c.- Por un punto exterior.

El primer método se basa en el concepto de arco capaz de 90º que es media circunferencia, dado una circunferencia y un punto exterior P, se une el punto exterior P con el centro O, se halla el punto medio de dicho segmento M y se dibuja una circunferencia de diámetro PO, dicha circunferencia corta a la dada en dos puntos T1 y T2 que unidos con el punto exterior P determinan la rectas tangentes “t1” y “t2” (Fig.3a).

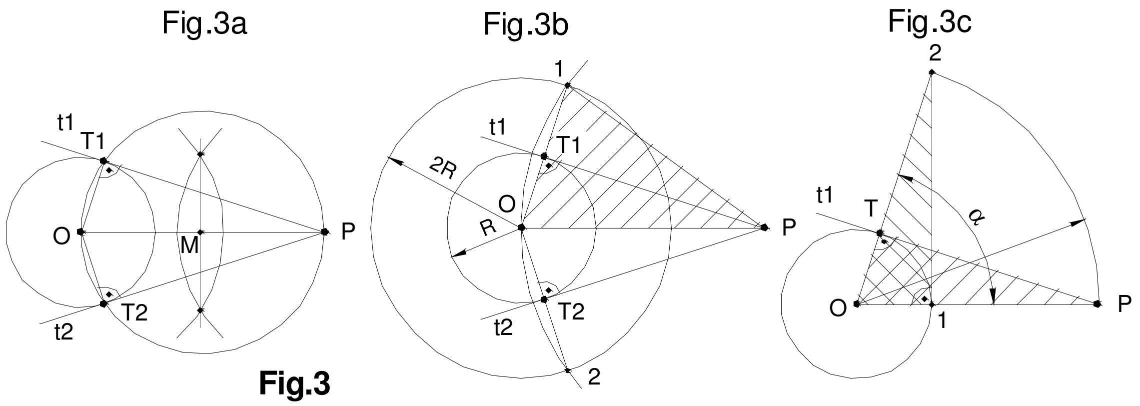



**Fig.3**

En el segundo método se dibuja una circunferencia de centro O y radio, doble, a continuación con centro en P se dibuja un arco que pase por el centro O y corte a la circunferencia de radio doble en los puntos 1 y 2, al unir 1 y 2 con el centro se obtienen los puntos de tangencia “T1” y “T2” que unidos con el punto P determinan las rectas solución, dicho método se basa en que el triángulo P,1,O es un triángulo isósceles y el punto T1 es el punto medio del lado desigual, por lo tanto la tangente es la altura que es perpendicular a la base (Fig.3b).

En el tercer método se une en primer lugar el punto P con O, a continuación con centró en el punto O y radio OP se dibuja un arco, por el punto 1 se dibuja una perpendicular al segmento PO hasta que corte a dicho arco en el punto 2, se une O con 2 y se obtiene el punto T que unido con el punto P determina la recta solución, dicho método se basa en de los triángulos OPT y O12 son iguales puesto que tienen dos lados iguales OP=O2 y O1=OT y el ángulo α igual por ser común, por lo tanto los ángulos O12 y OTP son iguales y rectos (Fig.3c).

## 2.3.- Rectas tangentes a dos circunferencias.

### 2.3.a.- A dos circunferencias de igual radio.

Fig.4a Fig.4b

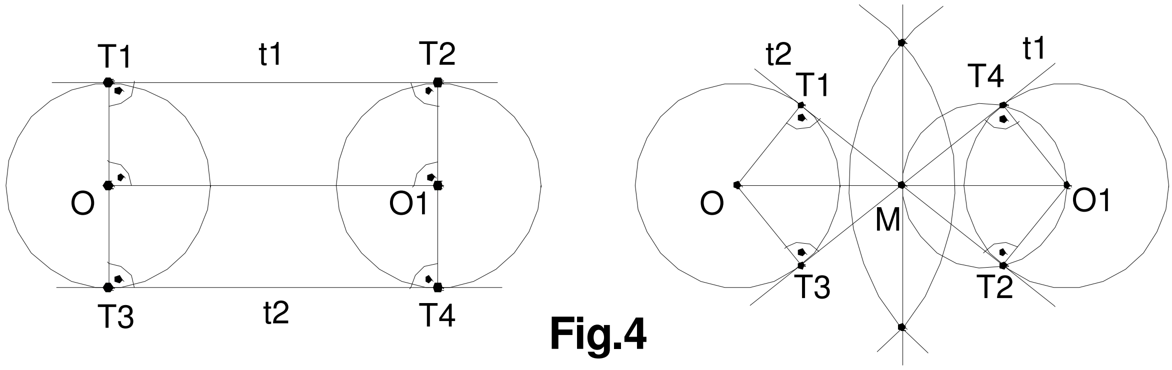



**Fig.4**

Para hallar las tangentes exteriores se unen en primer lugar los centros, las perpendiculares a dicha recta por los centros de las circunferencias determinan los puntos de tangencia que unidos dan las rectas solución (Fig.4a).
Para hallar las tangentes interiores se halla en primer lugar el punto medio de la recta que une los centros, el problema se reduce a dibujar la rectas tangentes a una circunferencia por un punto exterior M ya estudiado (Fig.4b)

### 2.3.b.- A dos circunferencias de distinto radio.

Este problema se resuelve por el método de las dilataciones, dicho método consiste en "encoger" la circunferencia de menor radio hasta convertirla en un punto o lo que es lo mismo reducirla en una magnitud equivalente a su radio, la circunferencia mayor se reduce en la misma proporción, el caso queda reducido a dibujar la rectas tangentes desde un punto exterior O, a una circunferencia de centro O1 y radio R2-R1, una vez hallados los puntos de tangencia 1 y 2 se unen con el centro O1 y se obtienen los puntos de tangencia definitivos T1 y T2, las paralelas por O a los segmentos O1,T1 y O1T2 determinan los puntos de tangencia T3 y T4 que unidos con T1 y T2 definen la rectas solución (Fig.5a).

Para hallar las tangentes interiores la circunferencia de menor radio se reduce a un punto O y la de mayor radio se "dilata" una magnitud equivalente al radio de la de menor radio, el problema queda reducido como el caso anterior a dibujar las tangentes desde un punto exterior O

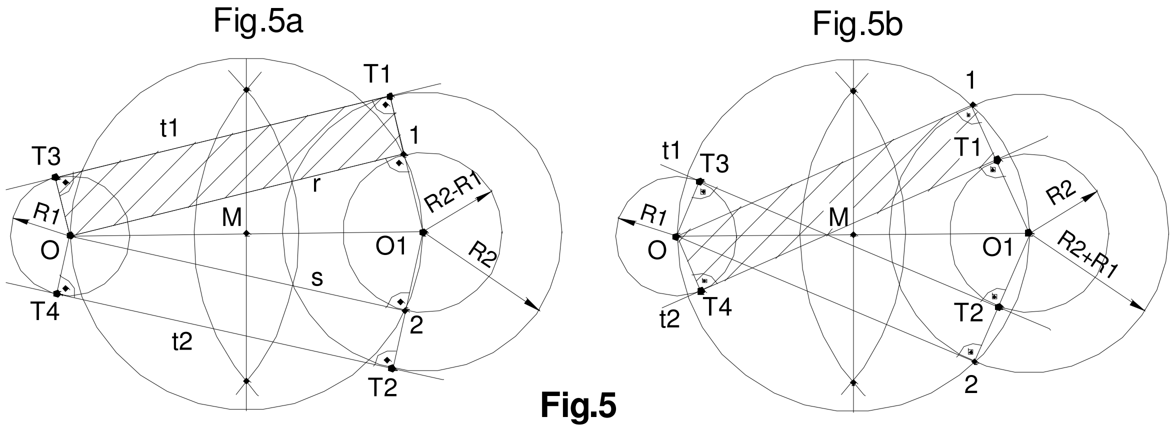



**Fig.5**

a una circunferencia de centro O1 y radio R2+R1, una vez obtenidos los puntos 1 y 2 se unen con el centro O1 y se obtienen los puntos de tangencia definitivos T1 y T2, las paralelas por O a los segmentos O1-T1 y O1-T2 determinan los puntos de tangencia T3 y T4 que unidos con T1 y T2 definen la rectas solución (Fig.5b).

## 2.4.- Enlaces de rectas y curvas.

Los enlances son básicamente aplicaciones de casos de tangencias, no obstante algunos de ellos no se pueden incluir dentro de ningún caso como son los siguientes:

*Enlazar puntos con una serie de arcos dado el radio del primer arco.*
Se hallan en primer lugar las mediatrices de los segmentos que unen los puntos, a continuación con centro en el primer punto P1 y radio R se dibuja un arco que corta a la primera mediatriz en el punto O1 centro del primer arco, para hallar el 2º arco se une el centro del 1º O1 con el 2º punto P2 dicha recta corta a la 2ª mediatriz en el punto O2 centro del 2º arco, y así sucesivamente (Fig.6a).

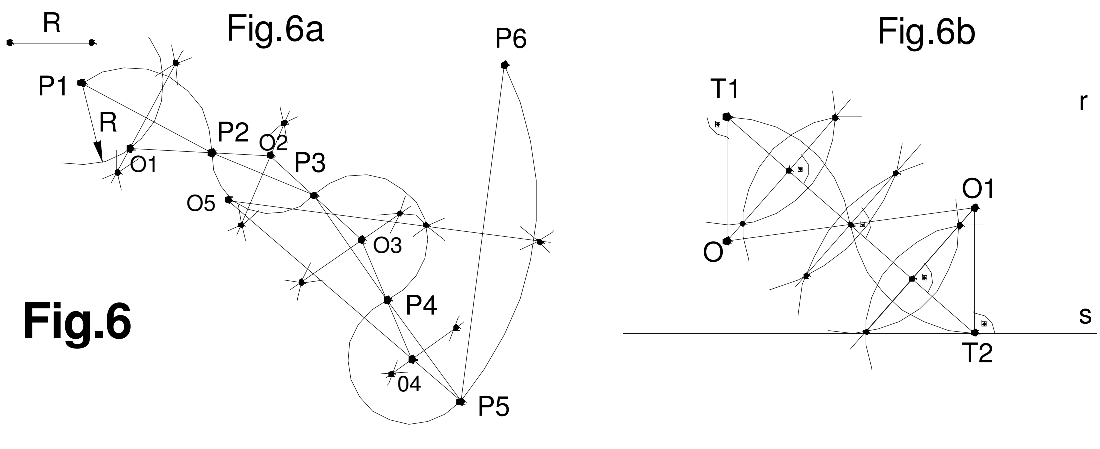


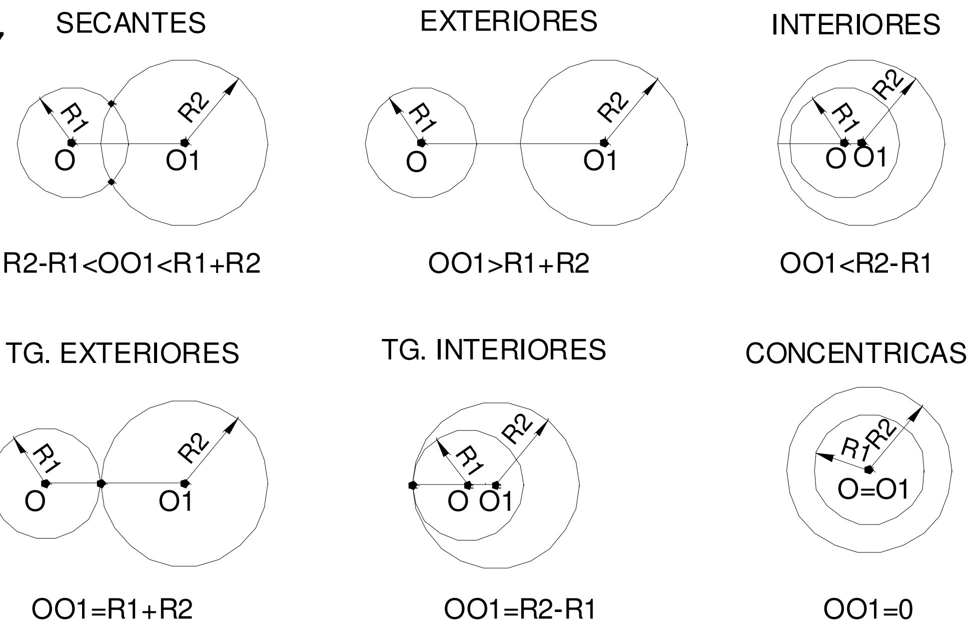

**Fig.6**

*Enlazar dos rectas paralelas con dos arcos del mismo radio y sentido contrario dados los puntos de tangencia en cada una de la rectas.*
Se unen los puntos de tangencia T1 y T2 y se halla la mediatriz de dicho segmento, a continuación se vuelven a hallar las dos mediatrices de los dos segmento resultantes, donde las perpendiculares por los puntos de tangencia a la rectas corten a dichas mediatrices estarán los centros de los arcos O y O1 (Fig.6b).

## 3.- TRAZADOS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES.

### 3.1.- Posiciones relativas de 2 circunferencias.

Fig.7




Las posiciones que pueden tener dos circunferencias son los que aparecen en la siguiente figura: (Fig.7)

### 3.2.- Nomenclatura seguir y casos de tangencias que se pueden plantear.

El número de casos de tangencia que se pueden plantear son un total de 22. Para poder clasificarlos utilizaremos la siguiente nomenclatura que se refiere a la forma de dar los datos:

- P: significa que la circunferencia solución pasa por un punto dado. Estos puntos podrá ser de tres tipos:
  - Pe: el punto es exterior a la circunferencias dada (podrá estar fuera o dentro de la circunferencia nunca en el contorno).
  - Pr: el punto está contenido en una recta dada.

- Pc: el punto está contenido en una circunferencia dada.

- r: significa que la circunferencia solución será tangente a una recta dada.
- c: significa que la circunferencia solución deberá ser tangente a una circunferencia dada.
- R: significa que conocemos el radio de las circunferencias buscadas.

Así por ejemplo el caso de tangencias *r,c,Pc* significa que nos dan de dato una recta una circunferencia y un punto contenido en esa circunferencia y hay que hallar circunferencias que sean tangentes a la recta y a la circunferencia dada en el punto Pc.

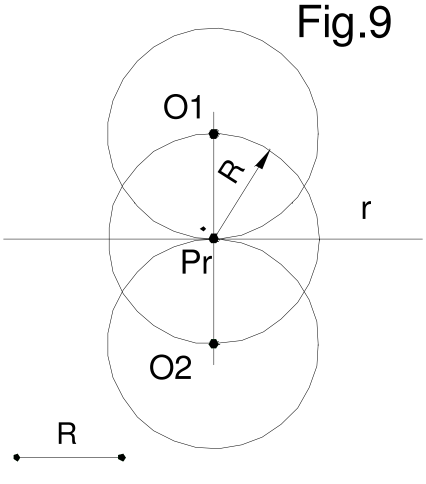
Los datos siempre serán tres y los casos que se pueden plantear así como los procedimientos de resolución son los que figuran en la siguiente tabla (Fig.8):

| Caso Nº | MÉTODOS / DATOS | Lugar Geom | Dilatac. | Homotecia | Potencias | Inversión | Nº soluciones |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Pr,r,R | ● | | | | | 2 |
| 2 | Pe,r,R | ● | | | | | 2 |
| 3 | Pc,c,R | ● | | | | | 2 |
| 4 | Pe,c,R | ● | | | | | 4 |
| 5 | r,r,R | ● | | | | | 4 |
| 6 | r,c,R | ● | | | | | 8 |
| 7 | c,c,R | ● | | | | | 8 |
| 8 | Pr,Pe,r | ● | | | | | 1 |
| 9 | Pe,Pe,r | | | ● | ● | ● | 2 |
| 10 | Pc,Pe,c | ● | | | | | 1 |
| 11 | Pe,Pe,c | | | | ● | ● | 2 |
| 12 | Pr,r,r | ● | | | | | 2 |
| 13 | Pe,r,r | | | ● | ● | ● | 2 |
| 14 | Pr,r,c | | ● | | ● | ● | 2 |
| 15 | Pc,r,c | | | | ● | ● | 2 |
| 16 | Pe,r,c | | | | | ● | 4 |
| 17 | Pc,c,c | | ● | | ● | ● | 2 |
| 18 | Pe,c,c | | | | | ● | 4 |
| 19 | r,r,r | ● | | | | | 4 |
| 20 | r,r,c | | ● | ● | ● | ● | 8 |
| 21 | r,c,c | | ● | | | ● | 8 |
| 22 | c,c,c | | ● | | | ● | 8 |



### 3.2.a.- Casos de tangencias resueltos por lugares geométricos.

Fig.9




- *Circunferencias tangentes a una recta dado el punto de tangencia en la recta conocido el radio. (Pr,r,R) Caso 1.*

Se dibuja en primer lugar una perpendicular a la recta por el punto Pr, con centro en dicho punto y radio R se dibuja un arco que corta a la perpendicular en los puntos O1 y O2 centros de las circunferencias solución (Fig.9).

- *Circunferencias tangentes a una recta que pasen por un punto dado conocido el radio. (Pe,r,R) Caso 2.*

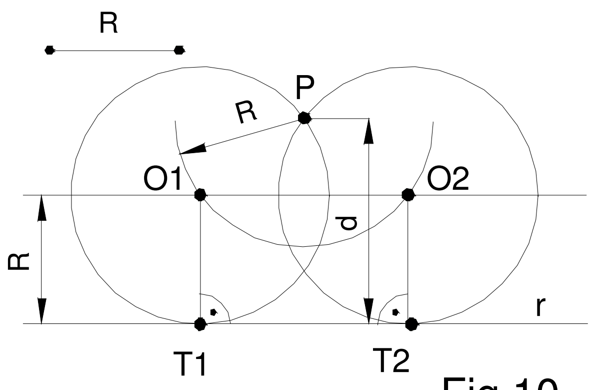
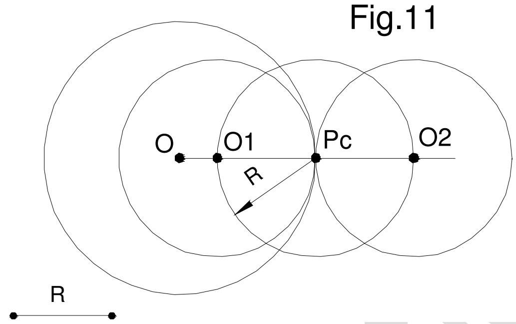



Fig.10

Se dibuja una paralela a la recta dada a una distancia del radio dado R, con centro en el punto P y radio R se dibuja un arco que corta a la paralela en los puntos O1 y O2 centros de las circunferencias solución, las perpendiculares a la recta r por O1 y O2 determinan los puntos de tangenciaT1 y T2. Este ejercicio tiene una solución si d=2R, 2 soluciones si d<2R y 0 soluciones si d>2R (Fig.10).

- *Circunferencias tangentes a una circunferencia dado el punto de tangencia en la circunferencia conocido el radio. (Pc,c,R) Caso 3.*

Fig.11




Se une el punto de tangencia Pc con el centro O de la circunferencia dada, a continuación con centro en el punto de tangencia Pc se dibuja un arco de radio R que corta a la recta anterior en los puntos O1 y O2 centros de las circunferencias buscadas (Fig.11).

- *Circunferencias tangentes a una circunferencia que pasen por un punto conocido el radio. (Pe,c,R) Caso 4.*

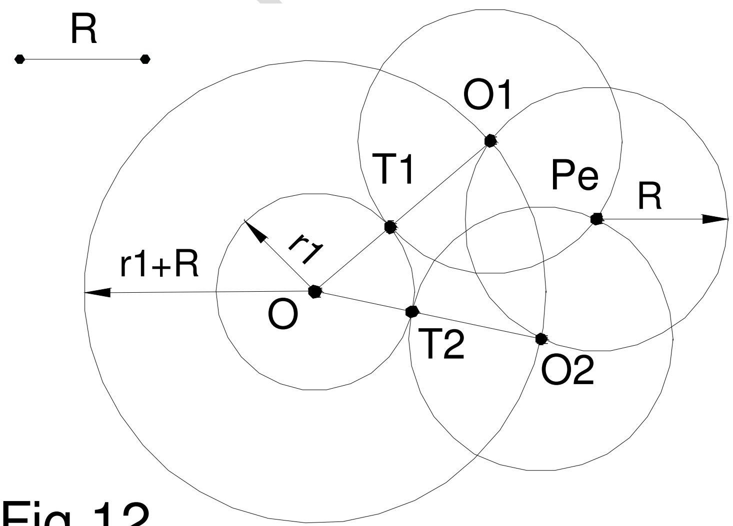



Fig.12

Con centro en el punto exterior dado Pe se dibuja un arco de radio R a continuación con centro en el punto O se dibuja otro arco de radio r1+R que corta al anterior en O1 y O2 centros de las circunferencias solución, uniendo O1 y O2 con el centro O se obtienen los puntos de tangencia T1 y T2. Este ejercicio tiene 0 soluciones si el segmento OPe>r1+2R, una solución si OPe=r1+2R y dos soluciones si OPe<r1+2R (Fig.12).

- *Circunferencias tangentes a dos rectas dado el radio. (r,r,R). Caso 5.*

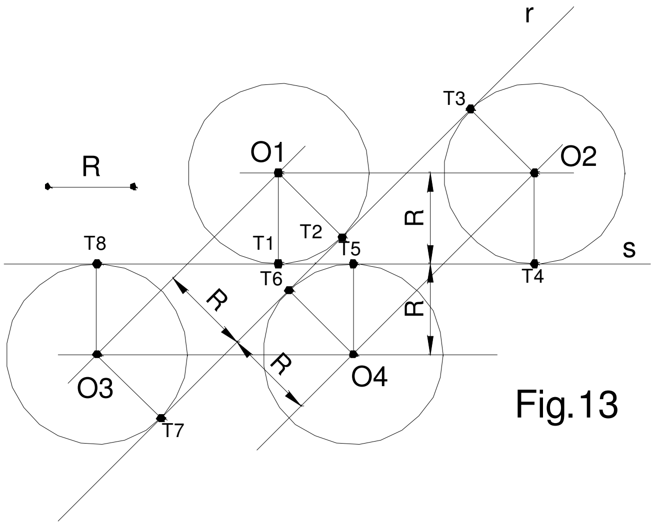


Fig.13

Se dibujan paralelas a las rectas dadas a una distancia igual al radio dado R a ambos lados, donde se corten las 4 paralelas estarán los 4 centros de las circunferencias solución. Las perpendiculares a las rectas por los centros determinarán los puntos de tangencia (Fig.13).

- *Circunferencias tangentes a una recta y una circunferencia conocido el radio. (r,c,R). Caso 6.*

Este ejercicio tiene distintas soluciones en función de lo que midan las distancias d1 y d2, si d1>2R 0 soluciones, si d1=2R 1 solución, si d1<2R 2 soluciones, si d2=2R 3 soluciones y si d2<2R 4 soluciones. Hallaremos en la Fig.14 las 2 soluciones en la que la circunferencia dato queda exterior y en la Fig.15 las 2 soluciones en la que la dato queda interior.

Se dibuja en los dos casos una recta paralela a la dada a una distancia de R, a continuación se dibuja con centro en O un arco de radio R+r1 en el primer caso y de radio R-r1 en el segundo caso, donde estos arcos



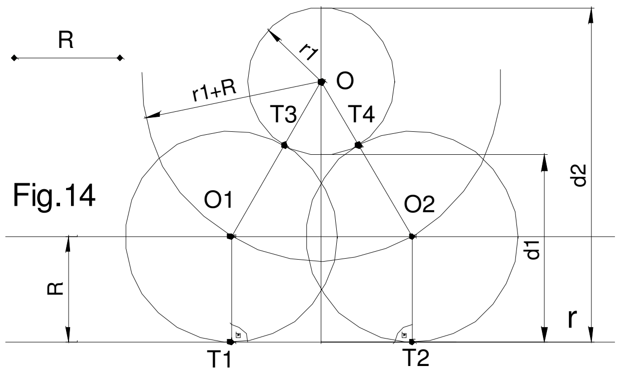


Fig.14

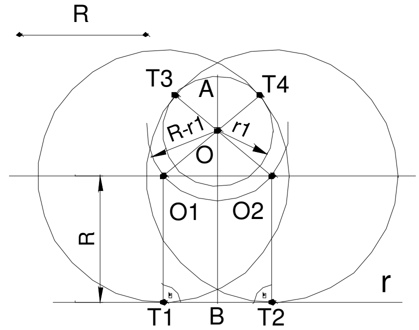


Fig.15

corten a la paralela estarán los centros de las circunferencias solución. Las perpendiculares a la recta por los centros determinarán los puntos de tangencia con ella T1 y T2, los puntos de tangencia con la circunferencia dato se obtienen uniendo O1 y O2 con O, puntos T3 y T4 (Fig.14 y 15).

- *Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el radio. (c,c,R). Caso 7.*

Este caso al igual que el anterior tiene distinto nº de soluciones en función la distancia d1 entre centros, si d1>2R 0 soluciones, si d1=2R 1 solución, si d1<2R tendrá entre 2 y 8 soluciones en función de que R sea mayor o menor que r1 y r2. Resolveremos un primer caso (Fig.16) en el que las 2 circunferencias dato quedan exteriores respecto a las soluciones y un segundo caso (Fig.17) en el que una queda interior y la otra exterior.

Se dibujan con centro en O y O1 dos arcos de radio r1+R y r2+R respectivamente, donde se corten se obtienen los centros de las circunferencias solución que unidos con O y O1 determinan los puntos de tangencia (Fig.16). En el segundo caso se dibujan con centro en O y O1 dos arcos de radio R-r1 y r2+R respectivamente, donde se corten se obtienen los centros de las circunferencias solución que unidos con O y O1 determinan los puntos de tangencia (Fig.17).

Si lo que se desea es que una circunferencia quede exterior respecto a las soluciones hay que sumarle el radio que dan de dato R, y si lo que se quiere es que quede interior hay que restarle al radio dado R el radio de la circunferencia en cuestión.

- *Circunferencias tangentes a una recta dado el punto de tangencia en dicha recta y que pasen por un punto dado. (Pr,Pe,r) Caso 8.*



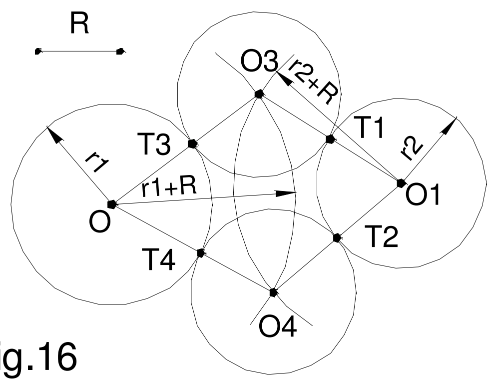



Fig.16

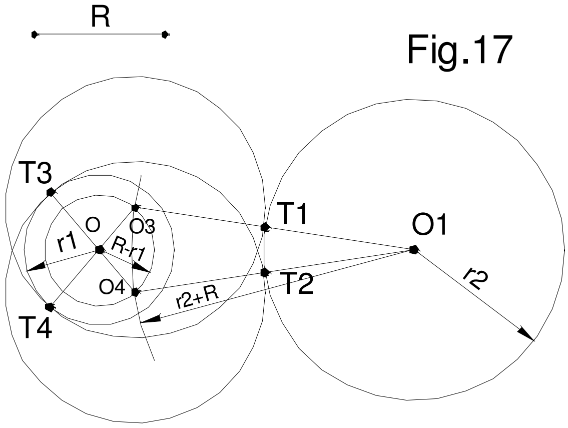
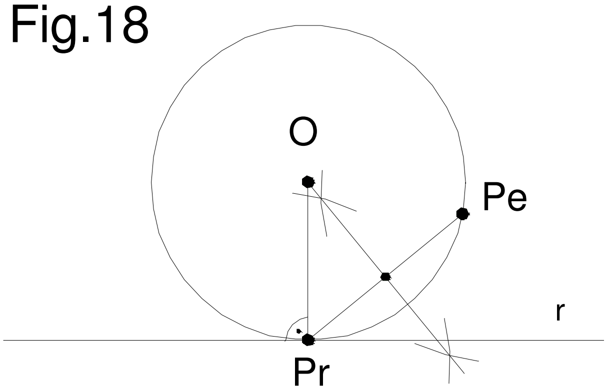



Fig.17

Este caso es muy sencillo, se dibuja en primer lugar una perpendicular a la recta por el punto Pr, a continuación se halla la mediatriz del segmento PrPe, donde la mediatriz corte a la perpendicular se obtiene el centro de la circunferencia solución (Fig.18).

Fig.18




- *Circunferencias tangentes a una circunferencia dado el punto de tangencia en dicha circunferencia y que pasen por un punto dado. (Pc,Pe,c) Caso 10.*

Se unen los dos puntos dados Pc y Pe y se halla la mediatriz, a continuación se une el centro de la circunferencia dada con el punto Pc, donde dicha recta corte a la mediatriz anterior se obtiene el centro de la circunferencia solución O1 (Fig.19).

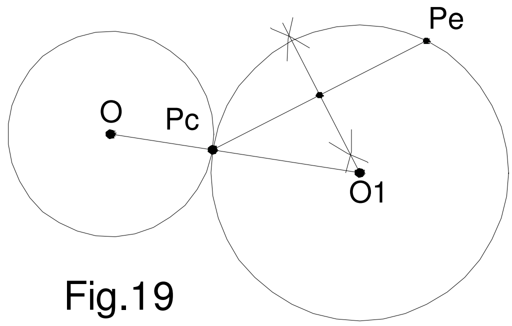



Fig.19

- *Circunferencias tangentes a dos rectas conocido el punto de tangencia en una de ellas. (Pr,r,r). Caso 12.*

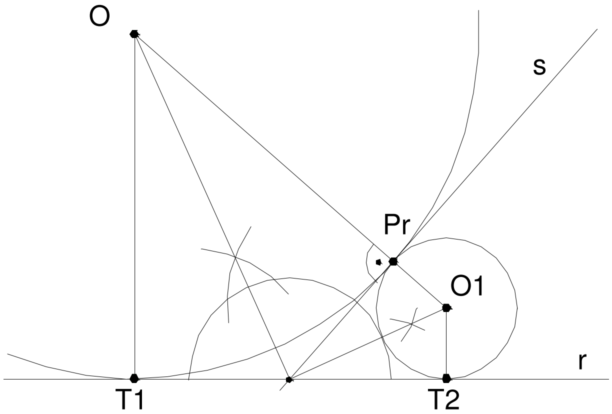


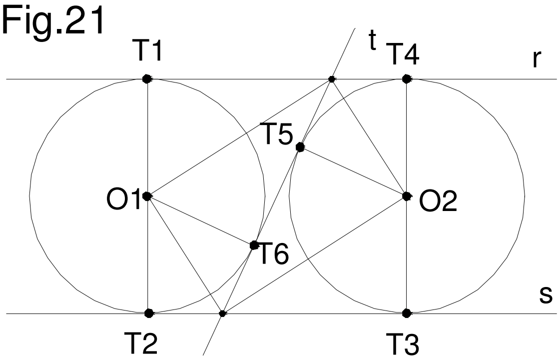

Fig.2

Se dibujan las dos bisectrices de los dos ángulos que forman las rectas, a continuación se dibuja una perpendicular por el punto dado Pr a la recta “s”, donde dicha perpendicular corte a las bisectrices se obtienen los centros de las circunferencias solución O y O1, las perpendiculares a la recta “r” por los centros determinan los puntos de tangencia T1 y T2 (Fig.20).

- *Circunferencias tangentes a tres rectas. (r,r,r). Caso 19.*

Este ejercicio se resuelve fácilmente hallando las bisectrices de los ángulos que forman las rectas entre sí, obteniéndose los centros donde éstas se corten y dibujando a continuación las perpendiculares a las rectas por los centros para hallar los puntos de tangencia (Fig.21 y 22).

Fig.21



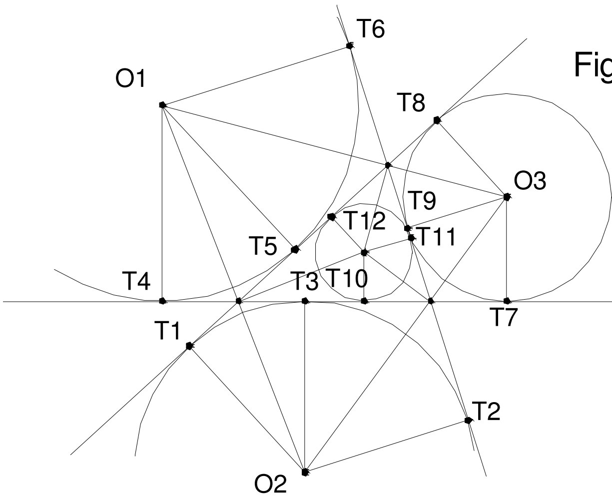
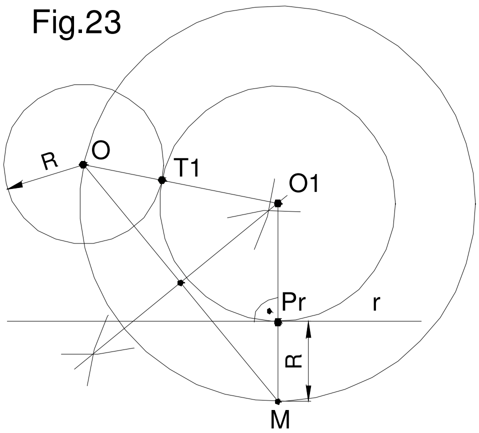




Fig.22

## 3.2.b.- Casos de tangencias resueltos por dilataciones.

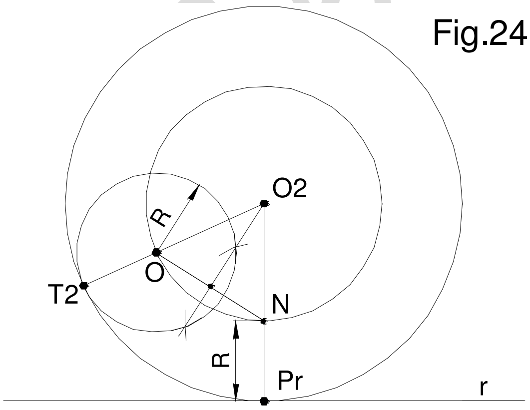
- *Circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta dado el punto de tangencia en la recta. (Pr,r,c). Caso 14.*

Fig.23




Se dibuja por él punto dado Pr una perpendicular a la recta, a continuación se transporta sobre dicha perpendicular hacia un lado y hacia el otro el radio de la circunferencia dada R y se obtienen los puntos M y N, se hallan las mediatrices de los segmentos MO y NO, donde dichas mediatrices corten a la perpendicular a la recta por Pr se obtienen los centros de las circunferencias solución O1 y O2 que unidos con el centro O determinan los puntos de tangencia T1 y T2 (Fig.23 y 24).

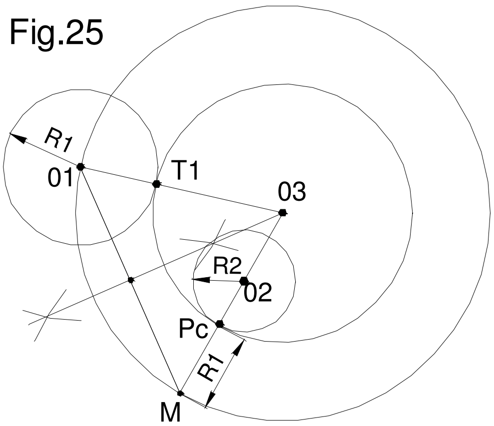
Fig.24




- *Circunferencias tangentes a dos circunferencias dado el punto de tangencia en una de las circunferencias. (Pc,c,c) Caso 17.*

Este ejercicio tiene dos soluciones en función de que la dilatación se realice hacia el exterior o el interior de la circunferencia, para resolverlo se une el centro de la circunferencia O2 con el punto de tangencia Pc y se transporta sobre esta recta a partir del punto el radio de la otra circunferencia R1 a un lado y al otro obteniéndose el punto M, se une el punto M con en centro O1 y se halla la mediatriz del segmento resultante, donde dicha mediatriz corte a la recta que pasa por O2 y Pc se obtienen los centros de las circunferencias solución que unidos con el centro de la otra circunferencia determinan los puntos de tangencia T1 (Fig.25 y 26).

Fig.25



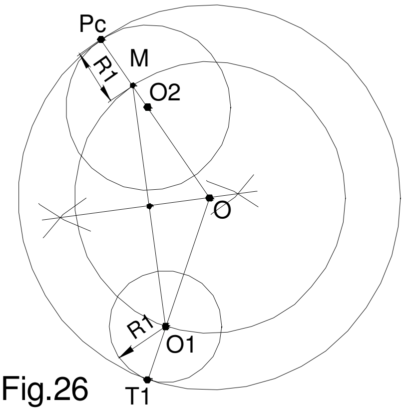




Fig.26

- *Circunferencias tangentes a dos rectas y una circunferencia. (r,r,c) Caso 20*

  Este ejercicio es una mezcla entre dilataciones y homotecia o entre dilataciones y potencia (ver apartados 3.2.c y 3.2.d).

- *Circunferencias tangentes a dos circunferencias y una recta. (r,c,c). Caso 21.*

  Este ejercicio es una mezcla entre dilataciones e inversión (ver apartado 3.2.e).

- *Circunferencias tangentes a tres circunferencias. (c,c,c). Caso 22.*

  Este ejercicio es una mezcla entre dilataciones e inversión (ver apartado 3.2.e).



## 3.2.c.- Casos de tangencias resueltos por potencias.

- *Circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos dados. (Pe,Pe,r) Caso 9.*

Dados los puntos A y B y la recta r, se prolonga el segmento AB hasta que corte a "r" en N, el segmento AB es el eje radical de todas las circunferencias que pasan por A y B incluidas las dos soluciones, el punto N es el punto medio entre los dos puntos de tangencia de las circunferencias solución y tendrá la misma potencia respecto a todas la circunferencias que pasen por A y B, se dibuja una circunferencia cualquiera que tenga su centro en la mediatriz de AB y que pase por estos dos puntos (circunferencia de centro O), se traza la tangente a esta circunferencia desde el punto N uniéndolo con el centro y hallando el arco capaz de 90º (punto T), con centro en N y radio NT se dibuja un arco que corta a la recta “r” en los puntos de tangencia T1 y T2, puntos de tangencia de las circunferencias soluciones, se trazan por estos dos puntos dos perpendiculares a la recta “r” y donde corten a la mediatriz de AB estarán los centros de las circunferencias soluciones O1 y O2 (Fig.27).

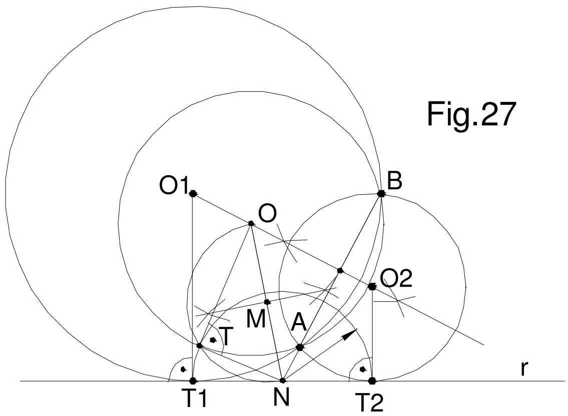


Fig.27

- *Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasen por dos puntos dados. (Pe,Pe,c). Caso 11.*

Se halla en primer lugar la mediatriz del segmento AB, se dibuja a continuación una circunferencia cualquiera que tenga su centro en dicha mediatriz, que pase por AB y que corte a la circunferencia dada en 1 y 2 (circunferencia de centro O´), se une 1 y 2 y se alarga hasta que corte a la prolongación del segmento AB en el punto M, desde M se dibujan las dos rectas tangentes en T1 y T2 a la circunferencia dada mediante un arco capaz de 90º, se unen T1 y T2 con el centro O y donde corten dichas rectas a la mediatriz de AB se obtienen los puntos O1 y O2 centros de las circunferencias solución.

Dicha construcción se basa en que la recta que pasa por A y B es el eje radical de las infinitas circunferencias que pasan por A y B (incluidas las circunferencias solución), y el punto M es el centro radical de las dos circunferencia solución y de la circunferencia dato por lo tanto tendrá la misma potencia respecto a las tres circunferencias (la distancia del centro radical a los puntos de tangencia es la misma) (Fig.28).

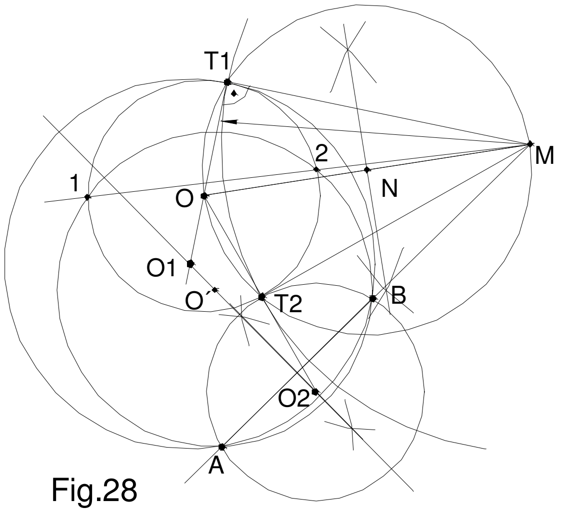


Fig.28

- *Circunferencias tangentes a dos rectas y que pasen por un punto dado. (Pe,r,r). Caso 13.*

Para resolver este ejercicio se dibuja en primer lugar la bisectriz del ángulo que definen las dos rectas dadas, a continuación se halla el simétrico del punto dado A respecto a dicha bisectriz (punto A´), el ejercicio se reduce al *Caso 9 Pe,Pe,r*. Se tratará de hallar las circunferencias que pasan por A y A´ que sean tangentes a una de las dos rectas dadas (Fig.29).

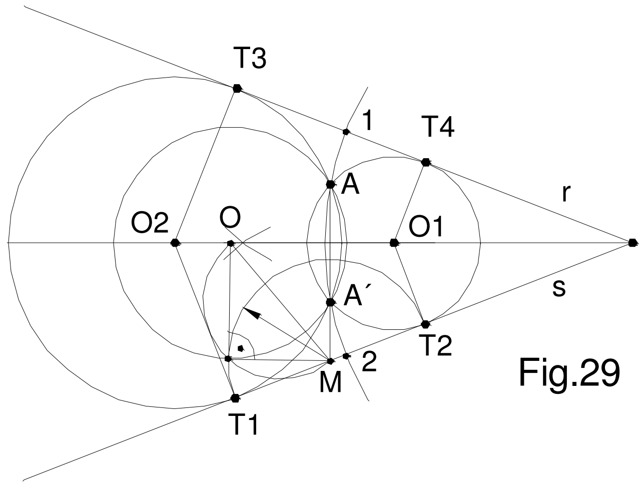


Fig.29

- *Circunferencias tangentes a una circunferencia y una recta dado el punto de tangencia en la recta. (Pr,r,c). Caso 14.*

Se dibuja por el punto dado Pr una perpendicular a la recta, se traza a continuación una circunferencia cualquiera que tenga su centro en dicha perpendicular que pase por el punto de tangencia con la recta Pr y que corte a la circunferencia dada en los puntos 1 y 2 (circunferencia de centro O´), se unen 1 y 2 (eje radical) y donde dicha recta corte a la dada se obtiene el punto M (centro radical), con centro en dicho punto y radio MPr se dibuja un arco que corta a la circunferencia dada en los puntos de tangencia T1 y T2, que unidos con O determinan los centros de la circunferencia solución donde corten a la perpendicular a la recta por Pr (Fig.30).

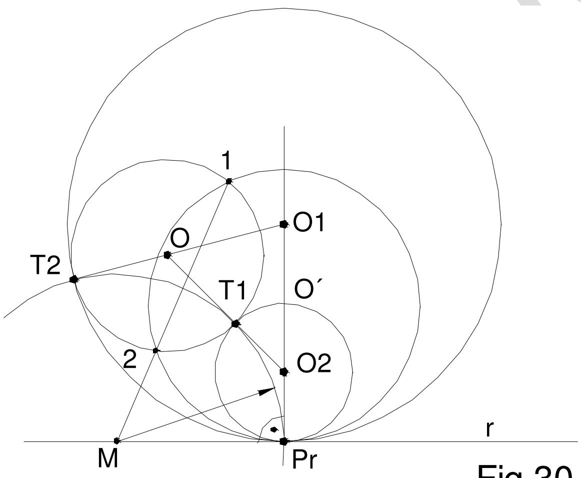


Fig.30

- *Circunferencias tangentes a una recta y una circunferencia dado el punto de tangencia en la circunferencia. (Pc,r,c). Caso 15.*

Se une el punto de tangencia en la circunferencia Pc con el centro O, se dibuja la perpendicular a dicha recta por el punto Pc, dicha perpendicular es el eje radical de las infinitas circunferencias que son tangentes en el punto Pc, dónde el eje radical corte a la recta dada se

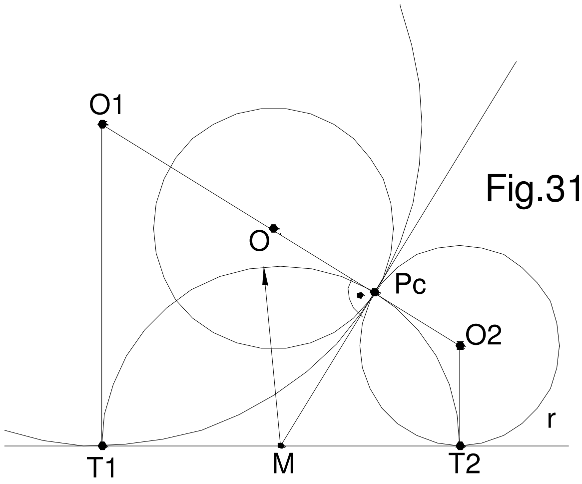


Fig.31

obtiene el punto M (punto medio del segmento que une los dos puntos de tangencia de las circunferencias solución con la recta) con centro en dicho punto se dibuja un arco de radio MPc que corta a la recta dada en los puntos de tangencia T1 y T2, las perpendiculares a la recta dada por dichos puntos determinan los centros de los circunferencia solución donde corten a la recta OPc (Fig.31).

- *Circunferencias tangentes a dos circunferencias dado el punto de tangencia en una de las circunferencias. (Pc,c,c). Caso 17.*

Se une el punto de tangencia en la circunferencia Pc con su centro O1, se dibuja la perpendicular a dicha recta por el punto Pc, esta recta es el eje radical de las infinitas circunferencias que son tangentes en el punto Pc (incluidas las dos soluciones), con centro en un punto cualquiera de la recta que pasa por O1 y Pc (punto O´) se dibuja una circunferencia que pase por Pc y que corte a la circunferencia de centro O2 en los puntos 1 y 2, se dibuja una recta que pase por 1 y 2 que corta al eje radical en el punto M (centro radical de las infinitas circunferencias tangentes en Pc y la circunferencia de centro O2), con centro en M y radio MPc se dibuja un arco que corta a la circunferencia O2 en los puntos de tangencia T1 y T2 que unidos con el centro O2 determinan los centros de las circunferencias solución donde corten a la recta que pasa por O1 y Pc. (Fig.32).

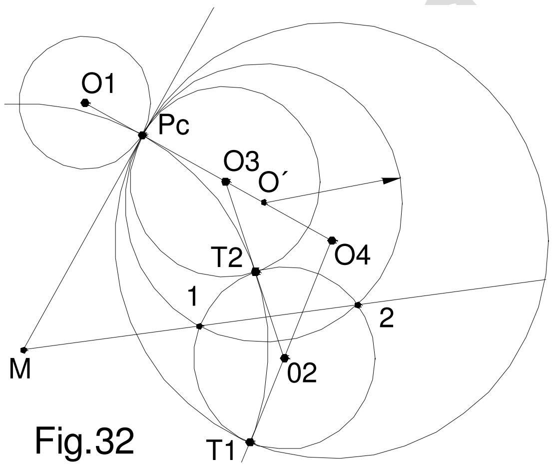


Fig.32

- *Circunferencias tangentes a dos rectas y una circunferencia. (r,r,c). Caso 20.*

Para resolver este ejercicio se “dilatan” (se desplazan paralelamente sobre si mismas) en primer lugar las rectas dadas hacia al interior en el primer caso (2 soluciones) o hacia el exterior en el segundo (2 soluciones) una magnitud equivalente al radio de la circunferencia dada

R, el ejercicio queda reducido al *Caso 13 r,r,Pe* siendo las rectas las dilatadas y el punto Pe el centro de la circunferencia dada O, se resuelve y se deshace la dilatación (Ver Fig.29).

### 3.2.d.- Casos de tangencias resueltos por homotecia.

- *Circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos dados. (Pe,Pe,r). Caso 9.*

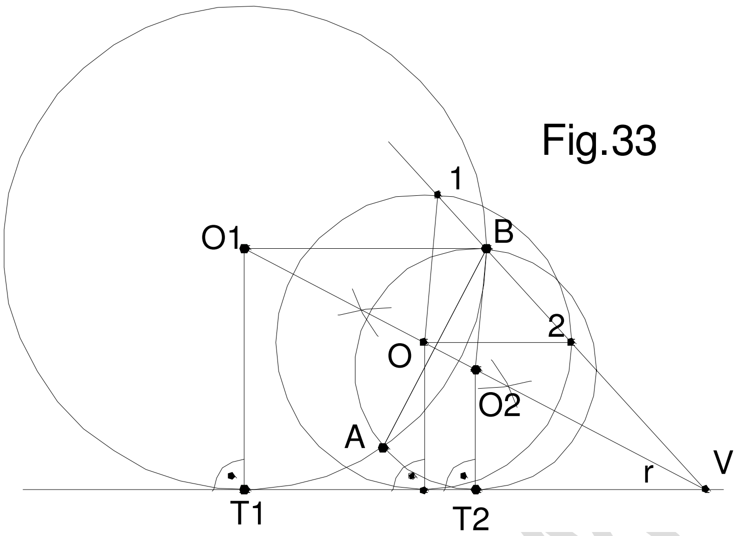


Fig.33

La resolución de este ejercicio se basa en que dos circunferencias siempre son homotéticas entre si, la recta tangente a las dos determina dos puntos homotéticos que son los puntos de tangencia. Para resolverlo se halla la mediatriz de la recta que une los dos puntos exteriores A y B, donde dicha mediatriz corte a la recta dada r se obtiene el centro de homotecia V, se dibuja a continuación una circunferencia cualquiera que tenga su centro en la mediatriz de AB y que sea tangente a la recta r (circunferencia de centro O), se une el centro de homotecia V con el punto B cortando a la circunferencia anterior en los puntos 1 y 2 que se unen a su vez con el centro O, las paralelas por B a los segmentos O-1 y O-2 determinan los centros de las circunferencias solución donde corten a la mediatriz de AB. Los puntos de tangencia con la recta se obtienen trazando las perpendiculares por O1 y O2 a la recta (Fig.33).

- *Circunferencias tangentes a dos rectas y que pasen por un punto dado. (Pe,r,r) Caso 13.*

Para resolver este ejercicio se dibuja en primer lugar la bisectriz del ángulo que definen las dos rectas dadas, se traza a continuación una circunferencia cualquiera que sea tangente a las dos rectas y tenga su centro en la bisectriz, se une el centro de homotecia V con el punto dado Pe que corta a la circunferencia en 1 y 2, se unen 1 y 2 con el centro O, las paralelas por Pe a las rectas O-1 y O-2 determinan los centros de las circunferencias solución donde corten a la bisectriz (puntos O2 y O3), los puntos de tangencia se obtienen dibujando las perpendiculares a las rectas por los centros (Fig.34).

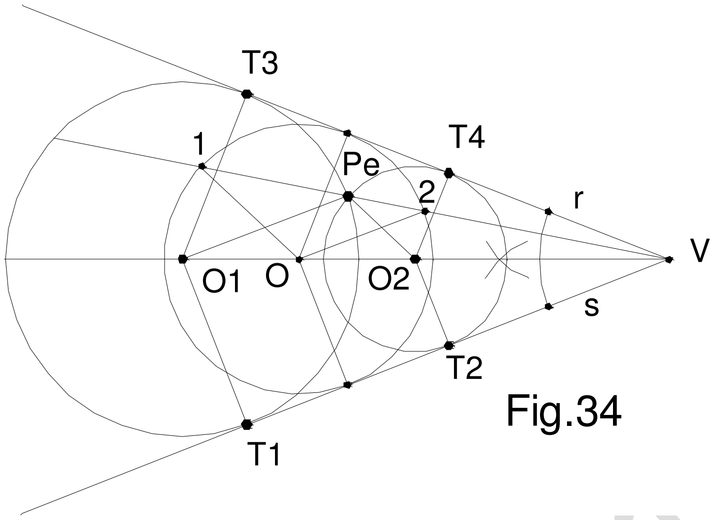



Fig.34

- *Circunferencias tangentes a dos rectas y una circunferencia. (r,r,c). Caso 20.*

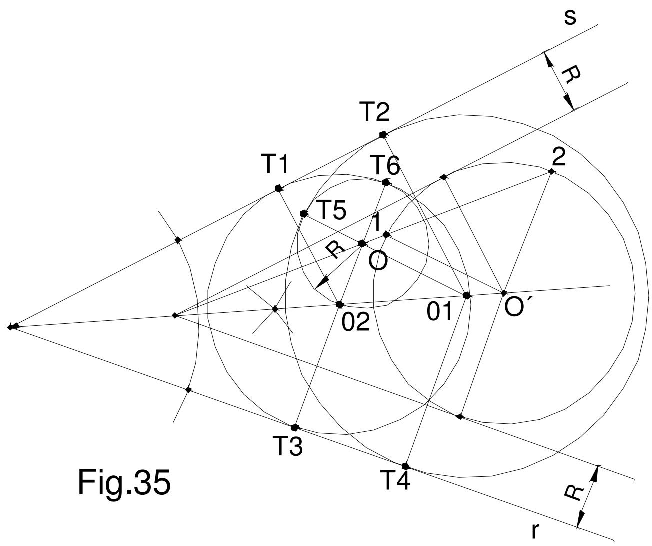



Fig.35

Para resolver este ejercicio se “dilatan” (se desplazan paralelamente sobre si mismas) las rectas dadas hacia al interior en el primer caso (2 soluciones) o hacia el exterior en el segundo (2 soluciones) una magnitud equivalente al radio de la circunferencia dada R, el ejercicio queda reducido al *Caso 13 r,r,Pe* siendo las rectas las dilatadas y el punto Pe el centro de la circunferencia dada O, se resuelve y se deshace la dilatación (Fig.35 y 36).

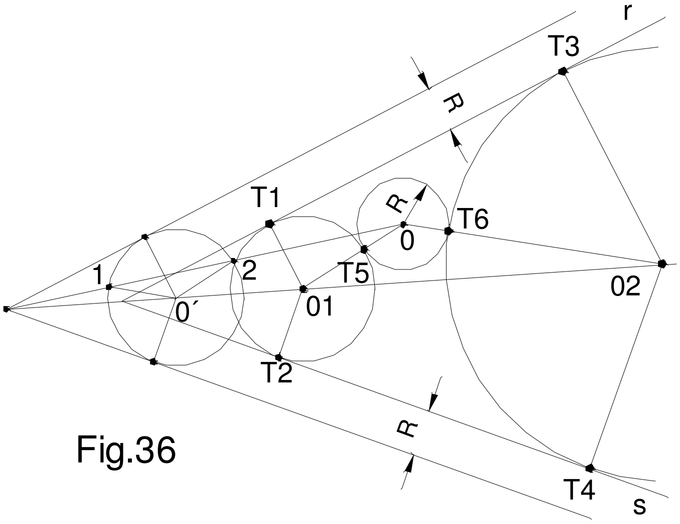



Fig.36

### 3.2.e.- Casos de tangencias resueltos por inversión.

Dada la amplitud del tema y puesto que la inversión no es un tema específico del temario únicamente resolveremos por este método debido a su interés los casos siguientes (para entender este tipo de ejercicios son necesarios conceptos previos de inversión, ver bibliografía recomendada): *Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasen por un punto dado (c,c,Pe) Caso 18,* que a su vez se puede convertir en una de sus variantes en el caso *Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasen por dos puntos dados (Pe,Pe,c) Caso 11.*
El último caso *Circunferencias tangentes a tres circunferencias (c,c,c) Caso 22* conocido también como “problema de Apolonio” se convierte en el caso *Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasen por un punto dado (c,c,Pe) Caso 18* por lo que no lo resolveremos.

- *Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasen por dos puntos dados. (Pe,Pe,c) Caso 11.*

Se toma uno de los puntos dados como centro de inversión (punto A), se dibuja la tangente por A a la circunferencia dada siendo AT la potencia de inversión $\sqrt{k}$ con lo que la circunferencia dada es inversa de si misma, se dibuja un arco con centro en A y radio AB que corta a la circunferencia dada en C, se une C con A y se halla su inverso C´ se une A con B y con radio AC´ se dibuja un arco que corta a AB en B´ inverso de B, por B´ se dibujan las tangentes a la circunferencia dada (rectas t1 y t2), las inversas de t1 y t2 serán las circunferencias solución, para ello se unen T1´y T2´ con A obteniéndose sus inversos donde corten a la circunferencia dada T1 y T2, se unen los puntos T1 y T2 con O y donde corten a la mediatriz de AB se obtendrán los centros de las circunferencias solución O1 y O2 (Fig.37).

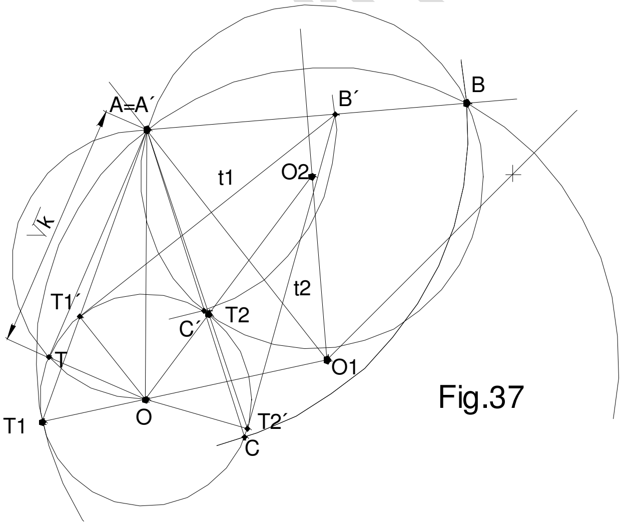


Fig.37

- *Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasen por un punto. (c,c,Pe) Caso 18.*

Este ejercicio se puede hacer de dos formas en la primera se hace que una de las circunferencias sea inversa de la otra, para ello se dibujan las rectas tangentes a las circunferencias y la recta que une los centros, las tres rectas se cortan en el punto C1 centro de inversión, se halla a continuación el inverso del punto P para lo cual se dibuja una circunferencia que pase por P y por dos puntos inversos T1 y T1´ (circunferencia de centro O1), se une el centro de inversión C1 con el punto P y donde corte a la circunferencia anterior se halla el inverso del punto P (punto P´), el ejercicio se reduce al *Caso11 Pe,Pe,c* siendo los dos puntos P y P´ y la circunferencia una de las dato, si en vez de trazar las tangentes exteriores se trazan las interiores se obtiene un nuevo centro de inversión C2 y otras 2 soluciones (Fig.38).

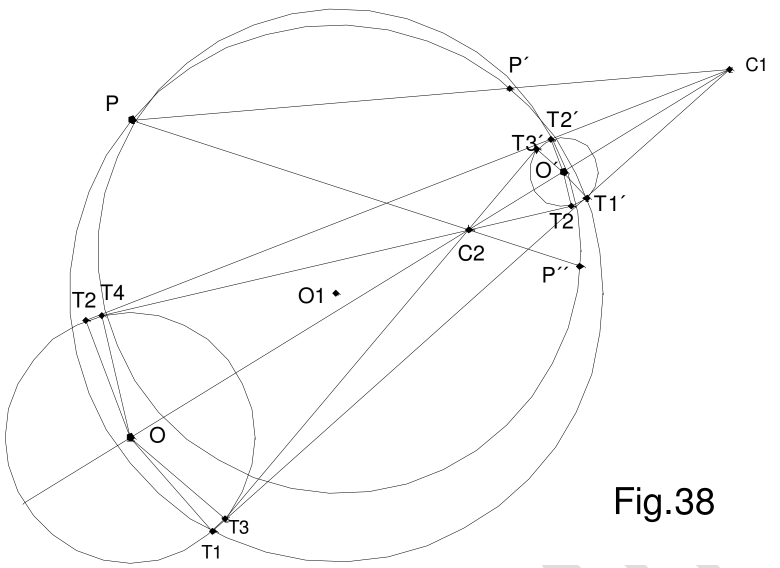


Fig.38

En el segundo método se considera el punto P como centro de inversión y como potencia de inversión $\sqrt{k}$ la tangente desde P a una de las circunferencias PT con lo que la circunferencia de centro O2 es inversa de si misma, para hallar la inversa de la otra se dibuja un arco de radio PT que corta a la circunferencia O1 en 1 y 2 (puntos dobles), la inversa de O1 pasara por 1 y 2 y será tangente a la recta PT1 (se resuelve el caso de tangencias *Pe,Pe,r* siendo los puntos 1 y 2, y la recta PT1 obteniéndose la circunferencia de centro O1´*)*, una vez halladas las inversas de O1 y O2 se dibujan las 4 rectas tangentes a dichas circunferencias (rectas t1,t2,t3,t4), las inversas de dichas rectas serán las circunferencias solución, en el ejercicio de la Fig.39 se ha hallado la inversa de t1 para lo cual se unen T2´y T3´con el centro de

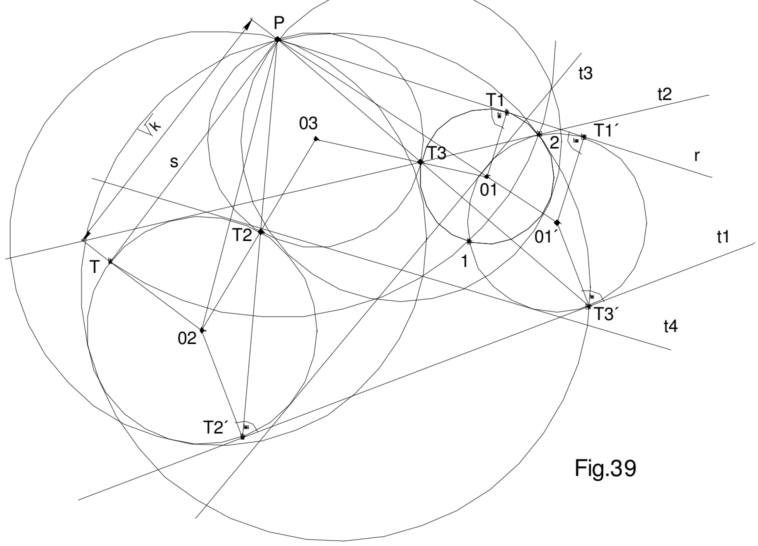


Fig.39

inversión P, donde corten a las circunferencias inversas de O1´y O2´se obtienen los puntos T2 y T3, que unidos con O2 y O1 determinan donde se corten el punto O3 centro de una de las soluciones (Fig.39).

## 7.- CONCLUSIONES.

Las tangencias pueden ser de tres tipos: rectas tangentes a una circunferencia (por un punto de la curva, por un punto exterior y paralelas a una dirección dada), rectas tangentes a dos circunferencias (exteriores o interiores) y circunferencias que sean tangentes a otras rectas o circunferencias bien conocido el radio o bien pasando por algún punto, en este tercer tipo de tangencias los datos siempre serán tres y los casos que se pueden plantear son un total de 22, estos casos se pueden resolver por lugares geométricos, por dilataciones, por homotecia, por potencias, o por inversión o por combinación de los anteriores, el método a elegir irá en función de la disposición de los datos y de su grado de dificultad. Las tangencias tienen una gran aplicación en el mundo del diseño industrial, arquitectónico, publicitario etc y en el trazado de obras públicas.

## 8.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y DOCUMENTALES.


- Autor: GONZALEZ MONSALVE, MARIO
  PALENCIA CORTÉS, JULIAN
  "Trazado Geométrico".
  Editorial: Los autores.
- Autor: RODRIGUEZ DE ABAJO, F. JAVIER
  "Curso de Dibujo Geométrico y Croquización."
  Editorial: Marfil S.A
- Autor: PUIG ADAM, P
  "Curso de geometría métrica (Tomo I y Tomo II)."
  Editorial: Euler Editorial S.A
- Autor: VILLORIA SAN MIGUEL, VICTOR
  "Fundamentos geométricos."
  Editorial: Dossat S.A

Email: preparadores@arrakis.es • Web: http://www.preparadoresdeoposiciones.com

NOTAS