Tema 49: *Superficies de revolución. Cuádricas. Superficies regladas, presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica.*

Índice:

1.- INTRODUCCIÓN:

Aunque pueden hallarse, sin duda, teoremas geométricos anteriores, probablemente es correcto decir que la geometría diferencial moderna de curvas y superficies, comienza en los primeros años del siglo XVIII, con aplicaciones del cálculo diferencial e integral a la geometría analítica. A Gaspard Monge puede considerarse el padre de la geometría diferencial de curvas y superficies en el espacio. Monge fue un emigrante maestro y sus lecciones en la Escuela Politécnica de París atrajeron a este campo multitud de jóvenes alumnos, entre los que hay que citar a Meusnier, Dupin, Lancret, Rodríguez,… todos los cuales han

Email: info@preparadores.eu • Web: http://www.preparadores.eu
REV.: 01/14

producido teoremas importantes de la geometría diferencial métrica que llevan sus nombres. Monge y sus discípulos fueron la gran escuela francesa de geómetras y expertos, a los que hay que añadir los nombres de Frenet, Serret, Pusieux, Bertrand y Cauchy.

La obra de Cauchy marca el fin del primer periodo de la geometría diferencial. El segundo se inicia por Gauss, quien introdujo el método singularmente fructífero de estudiar la geometría diferencial de curvas y superficies por medio de representaciones paramétricas de estos objetos. Citemos en este segundo periodo nombres como Darboux, Christoffel, Jacobi, Bonet, Beltrami, Plateau, que contribuyeron al desarrollo de la teoría clásica de curvas y superficies en el espacio.

El tercer gran periodo de la historia de la geometría diferencial fue iniciado por Riemann. Aquí hallamos una confirmación de la tendencia existente en la matemática actual a tratar de alcanzar la mayor generalización posible. El espacio tridimensional ordinario queda atrás y la investigación se concentra en cosa tales como variedades derivables de m dimensiones sumergidas en un espacio n-dimensional. Para esta generalización más amplia fueron necesarias dos cosas: una mejor notación y un procedimiento que dependa de la naturaleza de la variedad y no del sistema particular de coordenadas que se emplee. El cálculo tensorial se ideó con este objeto y en el desarrollo de su aspecto general intervinieron matemáticos tales como Ricci, Levi-Civita, y Einstein. Las geometrías diferenciales generalizadas, que se conocen como geometrías riemannianas, fueron exploradas intensamente y a su vez, condujeron al desarrollo de otras geometrías no riemannianas.

La investigación actual en la geometría diferencial esta orientada hacia lo general y abstracto y, en consecuencia, difiere del estudio clásico que estaba vinculado estrechamente a lo concreto. Un estudio de las tendencias recientes en geometría diferencial requiere considerable preparación matemática. En el tema, nos limitaremos a un análisis clásico de las superficies más frecuentes.

2.- SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.

Una **superficie de revolución** está engendrada por una curva que gira alrededor de una recta fija (**eje**), a la cual está rígidamente vinculada la curva. Cada punto de la curva describe una circunferencia (**paralelo**), que se encuentra en un plano perpendicular al eje, y tiene el centro sobre el eje; y cada plano perpendicular al eje corta a la superficie (si hay intersección) a lo largo de uno o varios paralelos. Los planos que pasan por el eje cortan a la superficie a lo largo de curvas todas iguales, que se llaman **meridianos o generatrices**, y son simétricas respecto al eje. La superficie puede ser considerada por lo tanto generada haciendo girar a un meridiano un ángulo llano alrededor del eje (o un giro entero a la mitad de un meridiano que se encuentre a un lado del eje).

Si se quiere escribir la ecuación de una superficie de revolución, podemos distinguir dos casos, según que la generatriz sea una curva plana o una curva alabeada; y para conseguir mayor sencillez, nos referiremos a un sistema cartesiano ortogonal cuyo eje z coincida con el eje de rotación.

a. Generatriz plana: Sea dada la ecuación del meridiano en uno de los planos que pasa por z, por ejemplo, sobre el plano yz; si con y, z designamos las coordenadas de un punto cualquiera de este plano (x=0), el meridiano tendrá una ecuación una ecuación del tipo f(y,z)=0. Un punto suyo, M(Y,Z) girando alrededor del eje z, ocupa la posición P(x,y,z); será posible establecer enseguida dos relaciones entre las coordenadas de M y las de P, recordando que M y P se encuentran sobre un mismo plano paralelo a xy, y son equidistantes del punto Q(0,0,z) en que aquel plano corta a z. Se tiene precisamente:

$$Z=z \qquad y \qquad Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

Si hacemos variar x,y,z de manera que los valores Y,Z satisfagan f(Y,Z)=0, el punto P(x,y,z) variará describiendo la superficie. Entonces la ecuación de la superficie de revolución será:

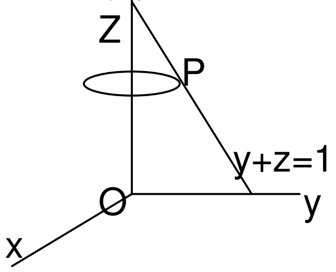
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

<u>Ejemplo:</u> Consideremos la recta y+z=1 en el plano yz; es decir, f(y,z)=y+z-1=0.
La curva de revolución viene dada por:

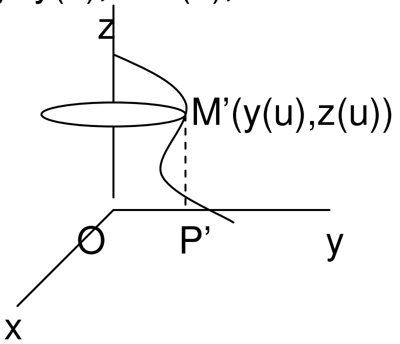
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+z-1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(1-z)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-z^2+2z-1=0$$

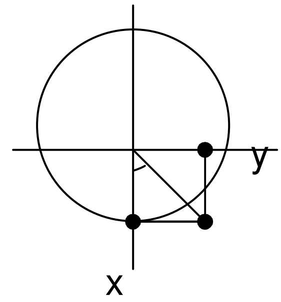
que corresponde a la ecuación de un cono.

Brevemente, se puede decir que la ecuación de la superficie de revolución generada por una curva del plano yz, se obtiene sustituyendo en la ecuación de la curva, y por la raíz anterior, $\sqrt{x^2+y^2}$.



Si la generatriz está dada en forma paramétrica, por las ecuaciones y=y(u), z=z(u), la ecuación de la superficie de revolución será:





La imagen vista desde el eje z nos indica los valores de las coordenadas paramétricas (en cada punto el radio de la circunferencia es y(u)):

x=OM'cosα y=OM' sen α z= M'P'
OM'=OP'=y(u) M'P'=z(u)

x= y(u) cos α y= y(u) sen α z=z(u)

b. Generatriz alabeada:

Si la generatriz viene dada por la curva: x=x(u) y=y(u) z=z(u) obtenemos:

x=OM' cos α y= OM' sen α z=M'P'=MP
OM'=OM=$\sqrt{x(u)^2+y(u)^2}$

Luego, la superficie de revolución en coordenadas paramétricas es:

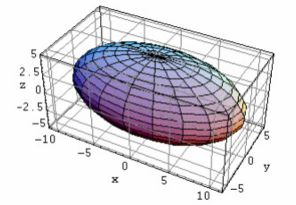
$$\begin{cases} x=\sqrt{x(u)^2+y(u)^2}\cos\alpha \\ y=\sqrt{x(u)^2+y(u)^2}\,sen\alpha \\ z=z(u) \end{cases}$$

3.- CUÁDRICAS DE REVOLUCIÓN.

Para hacer una aplicación del procedimiento antes indicado, examinaremos las superficies que se obtienen haciendo girar una cónica alrededor de uno de sus ejes de simetría. Encontraremos ciertas superficies particulares de segundo orden, que toman el nombre de **cuádricas de revolución**.

Sea por ejemplo, una elipse, que podemos considerar situada en el plano xz, de manera que x, z sean los ejes de la curva. Está tendrá una ecuación del tipo: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

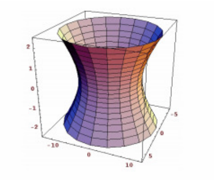
Haciendo girar la curva alrededor del eje z, obtendremos un **elipsoide de revolución** de ecuación:



$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

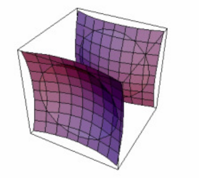
El elipsoide se llamará **aplastado** si a>b, **alargado** si a<b y es una **esfera** si a=b.

Análogamente, la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ girando alrededor del eje no transverso z, describe el **hiperboloide de revolución de una hoja**:



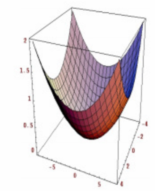
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

mientras que, girando alrededor del eje de la hipérbola $\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, describe el **hiperboloide de revolución de dos hojas**:



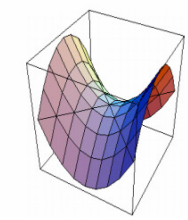
$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2+y^2}{b^2}=1$$

Finalmente, la parábola $x^2=2pz$, girando alrededor del eje z, describe el **paraboloide de revolución** de ecuación:



$x^2+y^2=2pz$

Paraboloide Elíptico



$x^2-y^2=2pz$

Paraboloide Hiperbólico

Se tienen así cuatro tipos de cuádricas de revolución, cuyas formas fáciles de imaginar, pueden ser cuidadosamente estudiadas en la teoría general de las cuádricas.

4.- SUPERFICIES REGLADAS: ALABEADAS Y DESARROLLABLES.

Definición: Se llaman **superficies regladas** a las superficies que tienen la propiedad de que por cada uno de sus puntos pasa una recta contenida en la superficie. A las rectas contenidas en la superficie se les da el nombre de **generatrices**.

Admitiremos que existe una curva que corta a todas las generatrices en un solo punto, y que llamaremos **directriz de la superficie**.

Supongamos que es OX=f(u) $u \in$ **I**, la ecuación de la directriz. A cada punto de la directriz le vamos asociar un vector unitario, que designaremos por v(u) y que tiene la dirección de la generatriz: $\|v\| = 1$.

La ecuación de la superficie vendrá dada por:

$$\underline{OM}=f(u)+\lambda \underline{v}(u) \quad \lambda \in R$$

donde u y λ son parámetros (que hacen las veces de coordenadas locales).

Vamos a asociar a cada generatriz un triedro trirrectángulo:

$$\begin{cases} e_1 = e_1(u) \\ e_2 = e_2(u) \\ e_3 = e_3(u) \end{cases}$$

Los vectores $\frac{de_1}{du}, \frac{de_2}{du}, \frac{de_3}{du}$ vendrán dados en general, como combinación lineal de $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$. Vamos a tomar $e_1(u)=v(u)$, y además efectuaremos un cambio de parámetro u=u(t), para conseguir que $\frac{de_1}{dt} = e_2$, con lo que obtenemos las formulas (teniendo en cuenta que el triedro es trirrectángulo):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{e}_2 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\vec{e}_1 + \sigma\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = -\sigma\vec{e}_2 \end{cases}$$

para demostrarlo basta considerar $\begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \end{cases}$ derivar y resolver.

Vamos a determinar el plano tangente a la superficie en un punto cualquiera de ella. La superficie tiene por ecuación:

$$OM = f(t) + \lambda \vec{e}_1$$

Calculemos en primer lugar el vector normal a la superficie:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{M}}{dt} = \vec{f}\,'(t) + \lambda \vec{e}_2 \\ \dfrac{d\vec{M}}{d\lambda} = \vec{e}_1 \end{cases} \qquad \vec{N} = \frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \frac{d\vec{M}}{d\lambda}$$ vector normal a la superficie.

Vamos a escribir f'(t), tomando como sistema de referencia **e_1,e_2,e_3:**

$$f'(t) = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \delta \cdot \vec{e}_3$$

de donde:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{M}}{dt} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + (\beta + \lambda) \cdot \vec{e}_2 + \delta \cdot \vec{e}_3 \\ \dfrac{d\vec{M}}{d\lambda} = \vec{e}_1 \\ \vec{N} = \delta \cdot \vec{e}_2 - (\beta + \lambda) \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

y el vector normal unitario, que designaremos por $\vec{n}$, será:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\delta \cdot \vec{e}_2 - (\beta + \lambda) \cdot \vec{e}_3}{\sqrt{\delta^2 + (\beta + \lambda)^2}}$$

El plano tangente a la superficie es perpendicular al vector $\vec{N}$. Si consideramos en una generatriz dos puntos M_1 y M_2, ¿qué tiene que ocurrir para que los planos tangentes coincidan? Los planos tangentes en M_1 y M_2 son dos planos del haz de aristas de la generatriz. Para que dichos planos coincidan, sus vectores normales habrán de ser paralelos, y por tanto: $\dfrac{\delta}{\delta} = \dfrac{\beta + \lambda_1}{\beta + \lambda_2} \Rightarrow \quad \delta \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$.

En consecuencia, una **superficie reglada** es **desarrollable** si y sólo sí los planos tangentes coinciden y puesto que λ_1 es distinto de λ_2, se deduce que si es distinto de 0, los planos tangentes no pueden coincidir. Y si δ=0, el vector $\vec{N}$ es entonces paralelo a **e_3.**

Obtenemos con ello, una primera clasificación de las superficies regladas: Si δ=0 para todo valor de t, los planos tangentes a lo largo de una generatriz coinciden y la superficie se llama **reglada desarrollable**. Si por el contrario, $\delta \neq 0$, la superficie se llama **alabeada o no desarrollable**. En este caso, las generatrices para las que δ=0, se llaman **generatrices singulares**. A δ suele llamarse **parámetro de distribución de la superficie**.

5.- SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES:

Vamos a caracterizar las superficies regladas desarrollables. Escribiremos la superficie en la forma:

$$\overline{O}\vec{M} = \vec{f}(t) + \lambda\cdot\vec{e}_1$$

$$\frac{d(OX)}{dt} = \alpha\cdot\vec{e}_1 + \beta\cdot\vec{e}_2 + \delta\cdot\vec{e}_3$$

$$\overline{O}\vec{X} = \vec{f}(t)$$

Por ser desarrollables la superficie, δ=0 para todo valor de t. Vamos a hallar en primer lugar la expresión de δ en función de $\vec{f}$ y de $\vec{e}_1$:

$$\left|\vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right| = \left|\vec{e}_1, \vec{e}_2, \alpha\cdot\vec{e}_1 + \beta\cdot\vec{e}_2 + \delta\cdot\vec{e}_3\right| = \delta\cdot\left|\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right| = \delta$$

Consideremos t=ϕ(u), (con $\frac{dt}{du} \neq 0$), lo que implica:

$$\left|\vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{du}\cdot\frac{du}{dt}, \frac{d\vec{x}}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right| = \delta(u) = \left|\vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{du}, \frac{d\vec{x}}{du}\right|\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

Por tanto:

$$\delta = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{du}, \frac{d\vec{x}}{du}\right| = 0.$$

Vamos a ver en primer lugar que los planos, cilindros, conos y superficies tangenciales son superficies desarrollables. Para ello, consideramos sus ecuaciones:

- Ecuación del plano: **OM** = **a**·u +λ·**b** $\longrightarrow \frac{d\vec{b}}{du} = 0$
- Ecuación del cilindro: **OM** = **a** + λ·**v(u)** $\longrightarrow \frac{d\vec{a}}{du} = 0$
- Ecuación del cono: **OM** = **f(u)** + λ·**a** $\longrightarrow \frac{d\vec{a}}{du} = 0$
- Ecuación de la superficie tangencial: OM = **f(u)** + λ·**f'(u)** $\longrightarrow \left|\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}'\right| = 0$

En todos estos casos, se comprueba que se satisface la condición anterior.

Veamos ahora que las que las únicas superficies desarrollables son ésas.

Hipótesis: Sea una superficie reglada:

$$\begin{cases} \overline{O}\vec{M} = \vec{f}(u) + \lambda \cdot \vec{e}_1(u) \\ \overline{O}\vec{X} = \vec{f}(u) \end{cases}$$

tal que satisface:

$$\left| \vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{du}, \frac{d\vec{x}}{du} \right| = 0 .$$

Sabemos entonces que:

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \frac{d\vec{e}_1}{du} + \gamma \frac{d\vec{x}}{du} = 0$$

no siendo simultáneamente nulos $\alpha, \beta \quad y \quad \gamma$. Como máximo hay dos de ellos iguales a cero. Consideremos los distintos casos:

_ $\alpha = \beta = 0$. Es un cono, puesto que $\frac{d\vec{x}}{du} = 0 \Rightarrow \vec{f} = cte. \Rightarrow O\vec{M} = \vec{a} + \lambda \vec{v},$ cono.

_ $\alpha = \gamma = 0$. Es un cilindro, puesto que $\frac{d\vec{e}_1}{du} = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 = cte. \Rightarrow O\vec{M} = \vec{f}(u) + \lambda \cdot \vec{e}_1$, cilindro o plano.

_ $\beta = \gamma = 0$. Es imposible, pues habría de ser $\vec{e}_1 = 0$.

Veamos ahora que si no cumple ninguno de los tres casos anteriores, entonces ha de ser $\gamma \neq 0$. En efecto:

Supongamos γ=0 y $\|\vec{e}_1\| = 1$. Puesto que debe ser $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \quad y \quad \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} = 0, \vec{e}_1$ es ortogonal a $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ (en cuyo caso $\alpha = 0,$ y $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$=0, en cuyo caso $\vec{e}_1$ es constante).

Luego en todos los casos se verifica que $\gamma \neq$0. Por tanto, dividiendo por γ, obtenemos:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{d\vec{e}_1}{du} + \frac{d\vec{x}}{du} = 0$$

$$\frac{d\vec{x}}{du} + k(u) \cdot \frac{d\vec{e}_1}{du} = h(u) \cdot \vec{e}_1$$

$\overline{O}\vec{M} = \vec{f}(u) + \lambda \cdot \vec{e}_1$. Poniendo λ=k(u), tenemos la línea:

$$\overline{O}\vec{Z} = \vec{f}(u) + k(u) \cdot \vec{e}_1$$

Calculemos la tangente de esa línea:

$$\frac{d\vec{z}}{du} = \vec{f}\,'(u) + k(u)\frac{d\vec{e}_1}{du} + k'(u)\cdot\vec{e}_1 = (h(u) + k'(u))\cdot\vec{e}_1$$

Por tanto, la tangente es la generatriz en cada punto y es una superficie tangencial.

6.- CUÁDRICAS.

Definición: Una cuádrica es una superficie cuya ecuación en coordenadas cartesianas, rectangulares o no, es un polinomio de segundo grado en las tres variables x,y,z, igualado a cero.

Como las fórmulas de cambio de coordenadas son lineales, el grado del polinomio no se altera al hacer el cambio, luego la definición anterior es independiente del sistema de coordenadas. La ecuación general de las cuádricas es por consiguiente:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz + 2lx + 2my + 2nz + d = 0$$

Las cuádricas so la generalización, al espacio, de las cónicas.

Por el método de formación de cuadrados, y haciendo unos cambios de coordenadas, puede verse que la ecuación anterior es equivalente a alguna de estas otras:

a. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$, de donde $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. Podemos suponer D=-1, en este caso es la ecuación de un **elipsoide**, si los tres coeficientes A, B C con positivos; si los tres coeficientes son negativos, un **elipsoide imaginario**; un **hiperboloide de dos hojas** si son dos negativos y uno positivo. Si D=0, obtenemos un **cono real**, si dos coeficientes del mismo signo y el otro de signo contrario; y un **cono imaginario** si los tres tienen el mismo signo.

b. $Az^2 + Bxy + D = 0$. Siempre podemos suponer A positivo y, cambiando la orientación de un eje si fuese necesario, B negativo. Entonces, si D=0, la superficie es un **cono real**; si D es negativo, entonces dividiendo por –D nos queda la ecuación de un **hiperboloide de una hoja**; si D es positivo, se divide por D y nos queda la ecuación de un **hiperboloide de dos hojas**.

c. $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$. Podemos suponer A positivo y B negativo, entonces según que C sea positivo o negativo, la ecuación es la de un **paraboloide elíptico** o un **paraboloide hiperbólico**.

d. $Ax^2 + By^2 + D = 0$. Supongamos D$\neq$0; lo podemos suponer igual a 1; entonces la ecuación es: si A y B son los dos negativos, la de un **cilindro elíptico real**; si los dos son positivos, la de un **cilindro elíptico imaginario**; y si son de signo contrario, un **cilindro hiperbólico**. Si D=0, la ecuación representaría: si A y B son del mismo signo, **dos planos imaginarios conjugados que se cortan**, si son de signo contrario, **dos planos reales que se cortan**.

e. $x^2 + Ay = 0$. Es la ecuación de un **cilindro parabólico**.

f. $x^2 + A = 0$. Es la ecuación de **dos planos paralelos**, **reales** si A<0 y si A>0 entonces son **imaginarios**.

g. $Axy + Bz = 0$. Representa un **paraboloide hiperbólico**.

h. $Axy + B = 0$. Es un **cilindro hiperbólico**.

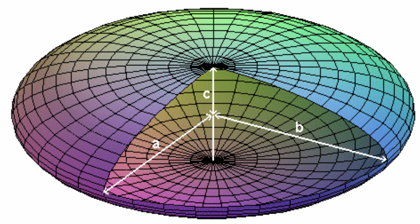
i. $Axy = 0$. Esta ecuación representa a **dos planos**.

Estudiemos ahora algunas cuádricas con algo más de profundidad.

6.1.- ELIPSOIDE.

Podemos expresar su ecuación, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Los planos coordenados son planos de simetría y por ello reciben el nombre d **planos principales**. Los ejes coordenados son ejes de simetría y son llamados **ejes del elipsoide**. El origen de coordenadas es centro de simetría y es el **centro del elipsoide**.



Las intersecciones de los ejes con el elipsoide determinan los vértices que son $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0)(0,0,\pm c)$. Los números a, b y c son los **semiejes**.

Los cortes, si existen, con los planos paralelos a los coordenados son elipses.

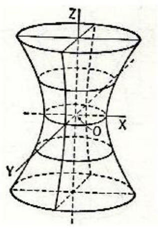
En el caso de que a=b=c$\neq$0 el elipsoide es una esfera de radio a. Cuando dos semiejes son iguales, el elipsoide es una superficie de revolución engendrada al girar una elipse (o circunferencia) alrededor del eje que contiene al tercer semieje.

6.2.- HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA.

También llamado **hiperboloide hiperbólico**, puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Al igual que en elipsoide, los **planos principales** son los planos coordenados, los **ejes** son los coordenados y el **centro** es el origen de coordenadas. Las intersecciones con los ejes determinan los **vértices**, que son: $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0)$. Los números a, b y c reciben el nombre de **semiejes**.



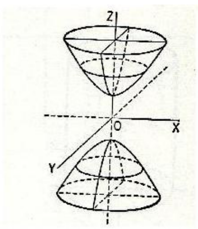
Los cortes del hiperboloide con los planos z=k son elipses, la menor de las cuales se da para z=0. Si los planos son paralelos a alguno de los otros dos planos coordenados, los cortes son hipérbolas.

Si a=b, el hiperboloide se convierte en una superficie de revolución alrededor del eje z.

6.3.- HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS.

También recibe el nombre de hiperboloide elíptico. Su ecuación puede escribirse de la forma: $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Los planos coordenados son los **planos principales**. Los ejes coordenados son los **ejes**, y el origen de coordenadas es el **centro**. Los **vértices** son: $(0,0,\pm c)$.



Los cortes con los planos z=k son elipses. Para los planos paralelos a alguno de los otros planos coordenados son hipérbolas.

No contienen rectas, luego no es una superficie reglada.

6.4.- PARABOLOIDE ELÍPTICO.

Su ecuación puede escribirse de la forma: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Los planos zy, zx son **planos principales**. El eje z el **eje** del paraboloide elíptico. El origen de coordenadas es el **vértice**.

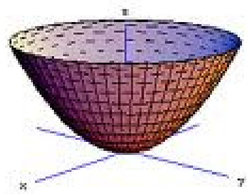
Los cortes con planos z=k son elipses. En el caso de que el plano sea x=k o y=k el corte es una parábola.

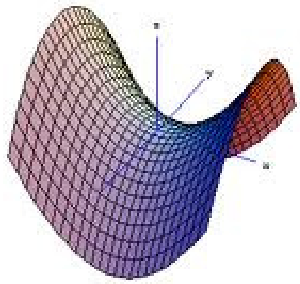
No contiene rectas, por lo tanto no es una superficie reglada.

6.5.- PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

Su ecuación es análoga a: $z^2 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$.

Los planos zy, zx son **planos principales**. El eje z el eje **del paraboloide hiperbólico**. El origen de coordenadas es el **vértice**.


Paraboloide elíptico


Paraboloide hiperbólico

El corte con un plano z=k es (si existe) un par de rectas pasando por el origen. Para los planos x=k e y=k obtenemos parábolas.

7.- PRECENCIA EN LA NATURALEZA, EN EL ARTE Y EN LA TÉCNICA.

Formas cilíndricas se encuentran en las conducciones del agua, gaseoductos, lapiceros, bolígrafos, tapones de corcho,…

Formas esféricas se encuentran en rodamientos, cúpulas de catedrales, juegos (billar, baloncesto,…), superficie de la Tierra,…

Un balón de rugby tiene forma de elipsoide de revolución.

Una superficie esférica que separan dos medios transparentes con distinto índice de refracción constituye un dioptrío esférico. Su estudio es importante, ya que muchos instrumentos ópticos están constituidos, en parte, por dioptríos esféricos.

Los faros de los automóviles son de tipo parabólico, pues el fondo del faro es una superficie que tiene forma de paraboloide.

Formas de paraboloide elíptico se encuentran en antenas de televisión.

8.- APÉNDICE I: CLASIFICACIÓN DE CUÁDRICAS.

La ecuación general de las cuádricas viene dada por la expresión:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

o bien, escrita en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Los invariantes respecto al grupo de transformaciones ortogonales son:

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Consideremos también:

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

Atendiendo a los valores de estas invariantes, se establecen las siguientes condiciones necesarias y suficientes para la clasificación de cuádricas:

Elipsoide	$A_3 \neq 0$		$A_2>0$	$A_1 \cdot A_3>0$	$A_4<0$	
Elipsoide imaginario	$A_3 \neq 0$		$A_2>0$	$A_1 \cdot A_3>0$	$A_4>0$	
Cono imaginario	$A_3 \neq 0$		$A_2>0$	$A_1 \cdot A_3>0$	$A_4=0$	
Hiperboloide de 1 hoja	$A_3 \neq 0$		$A_2 \leq 0$ o bien $A_1 \cdot A_3 \leq 0$			$A_4<0$
Hiperboloide de 2 hojas	$A_3 \neq 0$		$A_2 \leq 0$ o bien $A_1 \cdot A_3 \leq 0$			$A_4>0$
Cono de segundo grado	$A_3 \neq 0$		$A_2 \leq 0$ o bien $A_1 \cdot A_3 \leq 0$			$A_4=0$
Paraboloide elíptico	$A_3=0$	$A_4 \neq 0$		$A_4<0$		
Paraboloide hiperbólico	$A_3=0$	$A_4 \neq 0$		$A_4>0$		
Cilindro elíptico	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2 \neq 0$		$A_2>0$	$A_1K_2<0$
Cilindro elíptico imaginario	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2 \neq 0$		$A_2>0$	$A_1K_2>0$
Recta	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2 \neq 0$		$A_2>0$	$K_2=0$
Cilindro hiperbólico	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2 \neq 0$		$A_2<0$	$K_2 \neq 0$
Par de planos intersecantes	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2 \neq 0$		$A_2<0$	$K_2=0$
Cilindro parabólico	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2=0$		$K_2 \neq 0$	
Par de planos paralelos	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2=0$	$K_2=0$	$K_1<0$	
Par de planos paralelos imaginarios	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2=0$	$K_2=0$	$K_1>0$	
Par de planos coincidentes	$A_3=0$	$A_4=0$	$A_2=0$	$K_2=0$	$K_1=0$	

La ecuación canónica de las cuádricas viene dada por:

Si $A_3 \neq 0 \Rightarrow \quad ax^2+by^2+cz^2+\frac{A_4}{A_3}=0$.

Si $A_3=0$, $A_4 \neq 0 \Rightarrow \quad ax^2+by^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A_4}{A_2}}z=0$.

Si $A_3=0$, $A_4=0$, $A_2 \neq 0 \Rightarrow$ $ax^2 + by^2 + \frac{K_2}{A_2} = 0$.

Si $A_3=0$, $A_4=0$, $A_2=0$, $K_2 \neq 0 \Rightarrow$ $ax^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{A_1}}y = 0$.

Si $A_3=0$, $A_4=0$, $A_2=0$, $K_2=0 \Rightarrow$ $ax^2 + \frac{K_1}{A_1} = 0$.

Siendo a, b, c las raíces de $t^3 - A_1 t^2 + A_2 t - A_3 = 0$.
Las coordenadas del centro de una cuádrica son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3 = 0 \end{cases} \quad o \quad bien \quad \begin{cases} \frac{dC}{dx} = 0 \\ \frac{dC}{dy} = 0 \\ \frac{dC}{dz} = 0 \end{cases},$$ donde C es la ecuación de la cuádrica.

9.- CONCLUSIÓN.

10.- ORIENTACIONES PARA LA ELABORACIÓN DE LOS ASPECTOS DIDÁCTICOS.

1. Curso en que se explicaría:
Dentro del tema de ecuaciones de curvas y superficies se puede considerar el estudio de superficies cuádricas en segundo de Bachillerato, algunos textos lo incluyen y otros no.

2. Objetivos generales:
- Representar cilindros y conos por ecuaciones cartesianas.
- Reconocer las superficies cuádricas.
- Relacionar elipsoides, hiperboloides y paraboloides con sus ecuaciones respectivas.

3. Contenidos conceptuales:
- Cilindros y conos.
- Superficies cuádricas.
- Esfera.
- Elipsoide.
- Hiperboloide de una hoja.
- Hiperboloide de dos hojas.
- Paraboloide elíptico.

4. Contenidos procedimentales.
- Utilización de recursos gráficos (calculadoras gráficas y ordenadores) para representar curvas dadas en forma paramétrica.
- Estudio comparativo de las distintas ecuaciones reducidas de las cuádricas con sus representaciones gráficas.
- Reconocimiento de las cuádricas.

5. Temporalización:
Si hay tiempo para tratar el tema, dedicaremos alrededor de dos semanas de estudio, dentro del tema de superficies en el espacio.

6. Actividades:
- Reconocimiento gráfico y analítico (mediante las ecuaciones reducidas) de superficies cuádricas.
- Intersecciones de superficies cuádricas con planos (planos coordenados).

11.- BIBLIOGRAFÍA:

- Curvas y superficies. Sánchez Serrano. Editorial Index.
- Boyer. Historia de la matemática.
- Geometría diferencial. Lelong- Ferrand.
- Geometría diferencial clásica. Struik. Editorial Aguilar.
- Fundamentos de la geometría. Cometer. Limusa-Wiley.

NOTAS